Magia matematyki

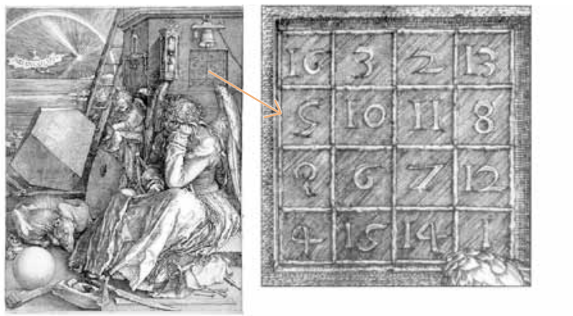
MAGICZNE KWADRATY

Każdy z was na pewno dobrze wie, co to jest kwadrat magiczny. Jednak dla przypomnienia przytoczmy jeszcze raz jego definicję. Kwadratem magicznym nazywamy kwadratową tablicę liczbową (macierz) o tej własności, że suma liczb w każdym wierszu tej tablicy i w każdej kolumnie, a także, suma liczb z każdej przekątnej jest taka sama. Oto przykład kwadratu magicznego stopnia 3. Jak łatwo policzyć wszystkie sumy z wierszy, kolumn i przekątnych wynoszą po 15. Oczywiście, istnieją też kwadraty magiczne większych stopni niż 3.

Pierwsze kwadraty magiczne znane były Chińczykom i Hindusom już kilka tysięcy lat temu. Najstarszy znany kwadrat magiczny pochodzi z Chin (przedstawiony obok). Powstał on najprawdopodobniej około roku 2800 pne. Nazywany jest magicznym kwadratem Lo Shu. Do Europy kwadraty magiczne trafiły dopiero około XV w. za sprawą Greka o nazwisku Moschopulos.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Od samego początku kwadratom magicznym przypisywano moc magiczną. Miały one odstraszać złe duchy i przynosić szczęście w transakcjach handlowych. Dlatego też były częstym motywem różnego rodzaju amuletów i talizmanów szczęścia. Kwadratami magicznymi przyozdabiano wiele budowli nawet o charakterze sakralnym. Najsłynniejszym chyba kwadratem magicznym jest kwadrat widniejący na obrazie pędzla Dürera (lub miedziorycie) zatytułowanego Melancholia.(Albrecht Dürer ur. 21. maja 1471 w Norymberdze, zm. 6. kwietnia 1528 tamże – niemiecki malarz, grafik, rysownik i teoretyk sztuki, uważany za najwybitniejszego artystę niemieckiego renesansu.)



Ciekawostką tego kwadratu magicznego jest fakt, że liczby umieszczone w dwóch środkowych polach dolnego wiersza stanowią datę powstania tego dzieła – obraz ten powstał w 1514 r.

W nauczaniu matematyki kwadraty magiczne stosowane są głównie w szkołach podstawowych do ćwiczeń w dodawaniu i odejmowaniu liczb. Są to bardzo proste zadania polegające na uzupełnianiu brakujących liczb tak, by powstał kwadrat magiczny. Ćwiczenia te nie wymagają żadnych trudnych działań, jednak budowa całego kwadratu magicznego jest zazwyczaj bardzo trudna – chyba, że budujący zna algorytmy budowania takich kwadratów. Poniżej przedstawię kilka ciekawych algorytmów służących do budowy kwadratów magicznych. Mogą się one przydać przy rozwiązywaniu ciekawych łamigłówek.

Własności kwadratów magicznych

Zacznę jednak od sformułowania kilku własności dotyczących kwadratów magicznych. Własności te są przydatne przy tworzeniu nowych kwadratów magicznych na bazie już zbudowanych. Będą one też wykorzystywane w algorytmach, które zaraz przedstawimy.

Własność I. Jeżeli wszystkie liczby pewnego kwadratu magicznego zwiększymy lub zmniejszymy o tę samą liczbę, to powstały kwadrat liczbowy nadal będzie kwadratem magicznym. Zmianie ulegnie jedynie suma liczb w każdym rzędzie poziomym i pionowym, no i, oczywiście, suma liczb z przekątnych – na przekątnej jest tyle samo elementów co w wierszu czy kolumnie.

Własność II. Podobnie kwadrat magiczny będzie nadal kwadratem magicznym, gdy wszystkie występujące w nim liczby pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera.

Własność III. Jeżeli mamy dwa różne kwadraty magiczne tego samego stopnia (taka sama liczba pól w rzędzie) i dodamy je do siebie, to znaczy zsumujemy liczby z analogicznych pól, to otrzymany w ten sposób nowy kwadrat nadal będzie kwadratem magicznym.

Własność IV. Kwadrat, który otrzymamy z kwadratu magicznego przez przestawienie dwóch równo odległych od środka kwadratu wierszy (lub kolumn) nadal będzie kwadratem magicznym. Na przykład w kwadracie magicznym 4. stopnia, można przestawić pierwszy wiersz z wierszem czwartym i wiersz drugi z wierszem trzecim. Nie wolno natomiast przestawiać wiersza pierwszego z wierszem drugim lub trzecim.

Własność V. Jeżeli wszystkie liczby wypełniające pola kwadratu magicznego są wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego – opisanego w 25. numerze *Świata Matematyki*, magiczną sumę tego kwadratu można obliczyć ze wzoru

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot S,$$

gdzie a_1 – najmniejsza z liczb, z których zbudowany jest kwadrat magiczny, a_n – największa z liczb, z których zbudowany jest kwadrat, S – stopień kwadratu magicznego.

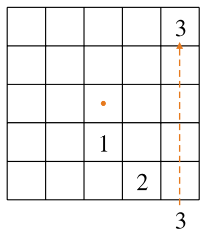
Niektóre algorytmy budowania kwadratów magicznych

Jest bardzo wiele algorytmów budowania kwadratów magicznych. Nie znam jednak uniwersalnego algorytmu, za pomocą którego można by zbudować kwadrat magiczny dowolnej wielkości – jeżeli go znacie, to przyślijcie do redakcji. Z tego właśnie powodu wprowadzono podział kwadratów magicznych na: kwadraty magiczne nieparzyste, kwadraty magiczne parzysto-parzyste i kwadraty magiczne nieparzysto-parzyste.

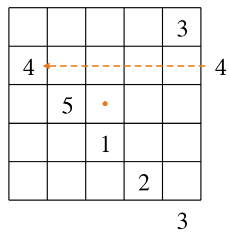
Kwadraty nieparzyste, to takie, których stopień (liczba wierszy czy kolumn) jest liczbą nieparzystą, np. $3, 5, 7, 9$ itd. **Kwadraty parzysto-parzyste**, to takie, których stopień jest podzielny przez 4 np. stopnia $4, 8, 12$ itd. Pozostałe kwadraty magiczne to **kwadraty magiczne nieparzysto-parzyste**.

Przykładowe algorytmy budowania kwadratów nieparzystych

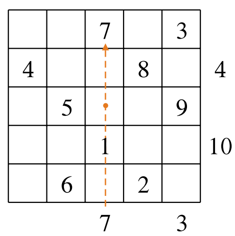
1. Algorytm hinduski, omówię na przykładzie kwadratu magicznego stopnia piątego. Zaznaczam pole środkowe kwardatu. Budowę zaczynamy od wpisania liczby 1 w pole stojące bezpośrednio pod polem środkowym. Następne liczby wpisujemy do pola poniżej i na prawo od jedynki, co przedstawiono na rysunku obok. Ponieważ liczba 3 wyskoczyła pod diagram, przenosimy ją więc „do góry" (do ostatniego pola w pierwszym wierszu).



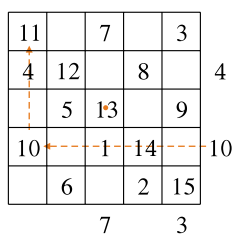
Na prawo, jedno pole w dół, znowu dopisujemy kolejną liczbę – liczbę 4. Znajduje się ona na prawo od kwadratu na wysokości wiersza drugiego. Przeniesienie jej w tej samej kolumnie nie jest już możliwe. Przenosimy ją do pierwszej kolumny tego samego wiersza – pierwszego pola w wierszu drugim i powtarzamy czynności algorytmu wpisania kolejnych liczb.



Za liczbą 5 stoi już liczba 1, dlatego liczbę 6 wpiszemy dwa wiersze niżej w tej samej kolumnie (dwa pola poniżej liczby 5). Dalej postępujemy jak po wpisaniu liczby jeden, czyli poruszamy się skosem na prawo i w dół. Niestety, kolejna liczba 7 znajduje się juz poza kwadratem. Tak więc przenosimy ją, w tej samej kolumnie do pierwszego wiersza i prowadzimy kontynuację dopisywania kolejnych liczb, zgodnie z istniejącą zasadą. Czynimy to do momentu, aż dojdziemy do liczby 10.



Liczbę 10, podobnie jak liczbę 4, przenosimy do pierwszej kolumny tego samego wiersza. Kolejną liczbę 11, z powodu zajętego miejsca przez liczbę 6, wpisujemy znowu dwa pola poniżej liczby 10 – podobnie jak było to z liczbami 5 i 6. W naszym przypadku będzie to znowu pod kwadratem i przenosimy ją do pierwszego pola w pierwszym wierszu, dalej postępujemy tak jak poprzednio.



Liczba 15 jest znowu wielokrotnością liczby będącej stopniem kwadratu – podobnie jak z liczbą 5, tak więc liczbę 16 powinniśmy wpisać dwa pola poniżej liczby 15 w tej samej kolumnie. Wypada to poniżej liczby 3, przeniesiemy ją więc do diagramu pod liczbą 3, i tak postępujemy, aż wypełnimy wszystkie pola diagramu zgodnie z opisanymi zasadami. Poniżej przedstawiamy to na rysunkach.

11		7		3	
4	12		8	16	4
17	5	13		9	17
10	18	1	14		10
	6	19	2	15	
		7	20	3	

11		7	20	3	
4	12		8	16	4
17	5	13	21	9	17
10	18	1	14	22	10
	6	19	2	15	23
		7	20	3	

11	24	7	20	3	
4	12	25	8	16	4
17	5	13	21	9	17
10	18	1	14	22	10
23	6	19	2	15	23
		7	20	3	

Myślę, że czytelnik sam sprawdzi, że otrzymany w ten sposób kwadrat jest magiczny, którego suma liczb w dowolnym wierszu czy kolumnie czy przekątnej jest równa 65. Jako ćwiczenie proponuję tą metodą znaleźć nieparzysty kwadrat magiczny stopnia 7.

2. Algorytm syjamski jest bardzo podobny do poprzedniego. Różni się tym, że liczbę 1 wpisujemy do środkowego pola pierwszego (górnego) wiersza i poruszamy się skosem w prawo do góry (nie skosem na prawo w dół jak poprzednio), a liczbę, której nie możemy wpisać, bo jej pole jest już zajęte, wpisujemy bezpośrednio pod ostatnią liczbą (nie jak poprzednio dwa pola niżej) – liczby te: 6, 11, 16 i 21 oznaczono kolorem. Są to wielokrotności stopnia kwadratu powiększone o 1. Dla kwadratu magicznego stopnia 7 będą to liczby: 8; 15; 22; 29; 36 i 43. Prześledźmy tę metodę na przykładzie kwadratu stopnia 5. Ostatecznie otrzymujemy kwadrat magiczny prezentowany obok.

	18	25	2	9	
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

3. Algorytm konika szachowego prześledzimy na przykładzie budowy kwadratu magicznego stopnia 5. Liczbę 1 wpisujemy do dowolnego pola, a każdą następną liczbę w miejsce wskazane przez skok konika szachowego. W przykładzie obok, liczbę 1 zapisaliśmy w lewym dolnym rogu. Jeżeli pole „skoku" jest poza górnym wierszem kwadratu, przenosimy go do pola w pierwszym wierszu na dole tej samej kolumny. Liczba 4 wyskakuje poza diagram, więc wpiszemy ją na przecięciu drugiego wiersza od dołu z czwartą kolumną. Kontynuujemy skoki aż do 5.

		3		
				5
	2			
			4	
1				

Liczbę 6 i wszystkie liczby o 1 większe od krotności stopnia kwadratu magicznego, wpisujemy do diagramu bezpośrednio pod liczbą o jeden mniejszą – jeżeli jest to dolny wiersz, liczbę umieszczamy w wierszu na samej górze. Dalej powtarzamy algorytm. W ten sposób nastąpi wypełnienie całego kwadratu. Ostatecznie otrzymamy wypełniony kwadrat magiczny prezentowany obok.

7	20	3	11	24
13	21	9	17	5
18	2	15	23	6
25	8	16	4	12
1	14	22	10	18

4. Algorytm De la Hire'a będzie zupełnie inny. Poprzednie algorytmy pozwalały wybudować tylko jeden kwadrat magiczny danego stopnia. Teraz przedstawimy algorytm, który daje możliwość wybudowania wielu różnych kwadratów dla każdego, nieparzystego stopnia. Algorytm ten przedstawimy na przykładzie budowy kwadratu magicznego znowu stopnia 5. Na początek musimy stworzyć dwa pomocnicze kwadraty magiczne. Do budowy pierwszego użyjemy kolejnych liczb: 1; 2; **3**; 4; 5; (od 1 do stopnia kwadratu). Środkową liczbę – w naszym przypadku 3, wpiszemy do lewego górnego narożnika kwadratu. Następne liczby wpiszemy do pierwszego rzędu w dowolnej kolejności. Następnie te same liczby, poza liczbą z górnego narożnika, przepisujemy do pierwszej kolumny, lecz w odwrotnej kolejności. Teraz tworzymy kwadrat magiczny przepisując liczby po skosie (po przekątnej) jak na rysunku.

3	1	5	4	2
2	3	1	5	4
4	2	3	1	5
5	4	2	3	1
1	5	4	2	3

Według podobnej zasady wybudujemy drugi pomocniczy kwadrat magiczny, ale z liczb, w ilości stopnia kwadratu, będących wielokrotnością stopnia kwadratu, łącznie z liczbą 0. Dla magicznego kwadratu stopnia 5 będą to liczby: 0; 5; **10**; 15; 20. Teraz liczbą środkową jest 10 i wpisujemy ją do prawego górnego narożlika. Pozostałe analogicznie jak poprzednio.

15	20	0	5	10
20	0	5	10	15
0	5	10	15	20
5	10	15	20	0
10	15	20	0	5

Aby otrzymać interesujący nas kwadrat magiczny sumujemy liczby stojące w analogicznych polach otrzymanych już dwóch kwartarów. Oto otrzymany w ten sposób kwadrat magiczny. Suma liczb w poszczególnych wierszach i kolumnach oraz na przekątnej znowu wynosi 65.

18	21	5	9	12
22	3	6	15	19
4	7	13	16	25
10	14	17	23	1
11	20	24	2	8

Przykładowy algorytm budowania kwadratów parzysto-parzystych

Zaczniemy od przedstawienia wyjaśnionego przed chwilą algorytmu De la Hire'a – po modyfikacji nadaje się do budowania kwadratów magicznych parzysto-parzystych. Dla przykładu zbudujemy kwadrat magiczny stopnia 8.
Zaczniemy od dwóch pomocniczych kwadratów magicznych. Pierwszy powstanie z kolejnych liczb: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; a drugi kwadrat z liczb będących wielokrotnościami stopnia kwadratu, czyli liczb: 0; 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56. Obydwa kwadraty mogą być dowolne, lecz należy przestrzegać następujących zasad:

- **dla pierwszego kwadratu** w każdym wierszu kwadratu, każda liczba musi wystąpić tylko raz; w kolumnach kwadratu liczby mogą się powtarzać; suma liczb znajdujących się w polach leżących symetrycznie względem środka pierwszego kwadratu musi wynosić 9;
- **dla drugiego kwadratu** zasady są podobne, tylko należy zamienić warunki dla wierszy z kolumn oraz suma liczb na polach względem środka ma wynosić 56.

Oto zbudowane według tych zasad przykładowe dwa pomocnicze kwadraty magiczne.

liczby w kolumnie mogą się powtarzać

1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8

liczby w wierszu mogą się powtarzać

56	0	56	0	0	56	0	56
32	32	48	8	8	48	16	32
48	8	40	16	16	40	8	48
40	16	24	24	24	24	32	40
16	24	32	32	32	32	40	16
8	48	16	40	40	16	48	8
24	40	8	48	48	8	24	24
0	56	0	56	56	0	56	0

Ostatecznie, po zsumowaniu, otrzymujemy kwadrat magiczny, krórego suma w rzędach, kolumnach czy na przekatnej wynosi 260.

57	2	59	4	5	62	7	64
40	39	54	13	12	51	18	33
49	10	43	20	21	46	15	56
48	23	30	29	28	27	34	41
24	31	38	37	36	35	42	17
9	50	19	44	45	22	55	16
32	47	14	53	52	11	26	25
1	58	3	60	61	6	63	8

Przykładowy algorytm budowania kwadratów parzysto-nieparzystych

Podobno te kwadraty buduje się najtrudniej. Zbudujemy tylko jeden kwadrat magiczny dziesiątego stopnia. W tym celu należy wykonać dwa kwadraty pomocnicze – pierwszy z liczb 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10, a drugi z liczb 0; 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.
Pierwszy kwadrat pomocniczy zaczynamy od wypełnienia pól stojących na przekątnych diagramu kwadratu magicznego. Obydwie przekątne wypełniamy kolejnymi liczbami od 1 do 10, rozpoczynając z lewej strony. Przedstawia to następny rysunek.

Zauważ, że w każdej kolumnie są po dwie takie same liczby (zaznaczone kolorem). Uzupełniamy resztę pól kwadratu zgodnie z następującymi zasadami:

- w każdej kolumnie są tylko dwie różne liczby i każda liczba występuje w kolumnie tyle samo razy;
- różne liczby stojące w danej kolumnie dopełniaja się do 11 (np 10 jest dopełnieniem liczby 1 do 11). Suma liczb tego samego wiersza w kolumnach skrajnych, czyli na przykład w kolumnie drugiej i przedostatniej, jest zawsze stała.

Drugi kwadrat budujemy według podobnych zasad jak pierwszy, tylko wypełnianie pól na przekątnych zaczniemy od górnego pola, lewego i prawego. Zauważymy, że tym razem takie same liczby stoją tylko w wierszach, nie w kolumnach. Dalsza budowa tego drugiego kwadratu odbywa się na tych samych zasadach co przy pierwszym kwadracie, tylko że stwierdzenia o kolumnach zamieniamy na stwierdzenia o wierszach. Dochodzi jeszcze tylko jedna zasada, która mówi, że w zacieniowanych polach w wierszu, musi stać ta sama liczba. Popatrz na diagramy poniżej

liczby w kolumnie mogą się powtarzać

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	2	8	4	5	6	7	3	9	1
1	9	3	7	6	5	4	8	2	10
10	9	8	4	6	5	7	3	2	1
1	9	3	7	5	6	4	8	2	10
10	2	8	7	5	6	4	3	9	1
1	9	3	4	6	5	7	8	2	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
10	2	8	4	6	5	7	3	9	1
1	9	8	7	5	6	4	3	2	10

liczby w wierszu mogą się powtarzać

0	90	0	90	0	90	90	0	90	0
10	10	80	10	80	80	80	80	10	10
20	70	20	70	20	70	70	20	70	20
30	30	60	30	60	60	30	60	60	30
50	40	50	40	40	40	50	50	40	50
40	50	40	50	50	50	40	40	50	40
60	60	30	60	30	30	60	30	30	60
70	20	70	20	70	20	20	70	20	70
80	80	10	80	10	10	10	10	80	80
90	0	90	0	90	0	0	90	0	90

I po zsumowaniu tych dwóch kwadratów otrzymujemy zbudowany kwadrat magiczny, krórego suma w rzędach, kolumnach czy na przekatnej wynosi 505. Kwadrat ten został przedstawiony na rysunku poniżej.

1	92	3	94	5	96	97	8	99	10
20	12	88	14	85	86	87	83	19	11
21	79	23	77	26	75	74	28	72	30
40	39	68	34	66	65	37	63	62	31
51	49	53	47	45	46	54	58	42	60
50	52	48	57	55	56	44	43	59	41
61	69	33	64	36	35	67	38	32	70
80	22	73	27	76	25	24	78	29	71
90	82	18	84	16	15	17	13	89	81
91	9	98	7	95	6	4	93	2	100

Teraz, uzbrojeni w narzędzia do budowy kwadratów magicznych, możemy przystąpić do rozwiązywania łamigłówek logicznych opartych na kwadratach magicznych. Życzę powodzenia.

Jacek Kredenc