EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI – rozwiązania, poziom rozszerzony(4)

(zadania publikowane w *Świecie Matematyki* nr 69, dostępnym w sklepie na naszej stronie)

Zadanie 1.

Założenie: $m \neq 0$ i $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot m \cdot 1 = 4m^2 - 4m \geqslant 0$. Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $m \in (-\infty; 0\rangle \cup \langle 1; \infty)$. Zatem $m \in (-\infty; 0) \cup \langle 1; \infty)$. Ze wzorów Viète'a wynika, że:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-2m}{m} = 2 \text{ oraz } x_1 x_2 = \frac{1}{m}.$$

Podany warunek możemy zapisać w postaci:

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2,$$

czyli:

$$2^2 - 2 \cdot \frac{1}{m} = 2,$$

stąd $m = 1$. Założenia zadania zostały spełnione.

Odpowiedź: $m = 1$.

Zadanie 2.

Mamy do rozwiązania równanie $x^3 - mx^2 + mx - 1 = 0$. Stąd kolejno otrzymujemy:

$$(x^3 - 1) - mx(x-1) = 0,$$
$$(x-1)(x^2 + x + 1) - mx(x-1) = 0,$$
$$(x-1)\left(x^2 + (1-m)x + 1\right) = 0,$$
$$x = 1 \text{ lub } x^2 + (1-m)x + 1 = 0.$$

Ostatnie równanie musi mieć dwa różne rozwiązania, oba różne od 1. Zatem:

$$\Delta = (1-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 > 0 \text{ oraz } 1^2 + (1-m) \cdot 1 + 1 \neq 0.$$

Wobec tego $m^2 - 2m - 3 > 0$ oraz $m \neq 3$. Rozwiązaniem ostatniej nierówności jest zbiór $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$.

Zadanie 3.

Podstawmy $t = 12^{|x|}$. Wtedy mamy do rozwiązania nierówność:

$$t^2 - 13t + 12 \geqslant 0,$$

stąd:

$$t \leqslant 1 \text{ lub } t \geqslant 12,$$

czyli:

$$12^{|x|} \leqslant 1 \text{ lub } 12^{|x|} \geqslant 12.$$

Zatem:

$$12^{|x|} \leqslant 12^0 \text{ lub } 12^{|x|} \geqslant 12^1,$$

a więc:

$$|x| \leqslant 0 \text{ lub } |x| \geqslant 1.$$

Wobec tego $x = 0$ lub $x \geqslant 1$ lub $x \leqslant -1$.

Odpowiedź: $m \in (-\infty; -1\rangle \cup \{0\} \cup \langle 1; \infty)$.

Zadanie 4.

Założenie: $x>0$. Oznaczmy $t=x^{\log x}$. Ponieważ $x^{\log\frac{1}{x}}=x^{-\log x}=\frac{1}{x^{\log x}}$, zatem mamy równanie:

$$t+\frac{1}{t}=10\frac{1}{10},$$

czyli:

$$10t^2-101t+10=0.$$

Stąd:

$$t=10 \text{ lub } t=\frac{1}{10},$$

czyli:

$$x^{\log x}=10 \text{ lub } x^{\log x}=\frac{1}{10}.$$

Stąd:

$$\log x^{\log x}=\log 10 \text{ lub } \log x^{\log x}=\log\frac{1}{10},$$

$$\log x\cdot\log x=1 \text{ lub } \log x\cdot\log x=-1.$$

Zatem:

$$(\log x)^2=1 \text{ lub } (\log x)^2=-1.$$

Pierwsze równanie daje alternatywę:

$$\log x=1 \text{ lub } \log x=-1.$$

Drugie równanie nie ma rozwiązania. Wobec tego mamy rozwiązania:

$$x=10^1=10 \text{ lub } x=10^{-1}=\frac{1}{10}.$$

Oba spełniają założenia.

Zadanie 5.

Mamy kolejno równania równoważne:

$$|\sin x|+|\cos x|=1,$$

$$(|\sin x|+|\cos x|)^2=1^2, \quad (\text{dla } a,b\geqslant 0 \text{ mamy } a=b\Leftrightarrow a^2=b^2)$$

$$|\sin x|^2+2|\sin x|\cdot|\cos x|+|\cos x|^2=1^2,$$

$$\sin^2 x+|2\sin x\cos x|+\cos^2 x=1,$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+|\sin 2x|=1,$$

$$1+|\sin 2x|=1,$$

$$|\sin 2x|=0,$$

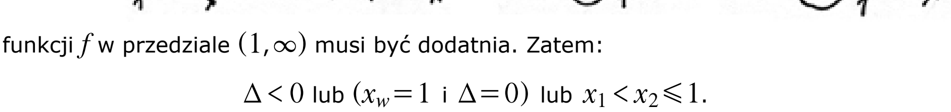
$$\sin 2x=0,$$

$$2x=k\pi,$$

$$x=k\cdot\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ – liczba całkowita}).$$

Zadanie 6.

Mamy $f(x)=x^3+mx^2+x+m$, skąd $f'(x)=3x^2+2mx+1$ dla $x\in R$. Wykres pochodnej (funkcja kwadratowa) musi być następujący:



gdyż pochodna funkcji f w przedziale $(1,\infty)$ musi być dodatnia. Zatem:

$$\Delta<0 \text{ lub } (x_w=1 \text{ i } \Delta=0) \text{ lub } x_1<x_2\leqslant 1.$$

Wobec tego:

$$2m^2-4\cdot 3\cdot 1<0 \text{ lub } x_w=\frac{-b}{2a}=\frac{-2m}{6}=1 \text{ lub } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\leqslant 1 \ (\text{dla } \Delta\geqslant 0,\ a>0).$$

Wynika stąd, że:

$$m\in(-\sqrt{3};\sqrt{3}) \text{ lub } m\in\emptyset \text{ lub } x_2=\frac{-2m+\sqrt{4m^2-12}}{6}\leqslant 1.$$

Przekształcamy ostatnią nierówność i otrzymujemy:

$$\sqrt{4m^2 - 12} \leqslant 6 + 2m.$$

Musi być:

$$6 + 2m \geqslant 0,$$

czyli:

$$m \geqslant -3.$$

Dalej mamy:

$$\left(\sqrt{4m^2 - 12}\right)^2 \leqslant (6 + 2m)^2,$$
$$4m^2 - 12 \leqslant 36 + 24m + 4m^2,$$
$$m \geqslant -2.$$

Ponadto:

$$4m^2 - 12 \geqslant 0,$$

czyli:

$$m \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{3}; \infty\right),$$

a więc:

$$m \in \left(-2; -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{3}; \infty\right).$$

Odpowiedź: $m \in \left(-2; -\sqrt{3}\right\rangle \cup \left\langle\sqrt{3}; \infty\right)$

Zadanie 7.

Rozważana nieskończona suma składa się z dwóch szeregów geometrycznych:

$$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \ldots \text{ oraz } \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \ldots \text{ (gdzie } x \neq 0).$$

Pierwszy z powyższych szeregów ma wyraz pierwszy x i iloraz $\frac{1}{2}x$.

Drugi z powyższych szeregów ma wyraz pierwszy $\frac{1}{x}$ i iloraz $-\frac{1}{x}$.

Warunkiem zbieżności nieskończonego szeregu geometrycznego o ilorazie q jest nierówność $|q| < 1$. Jeżeli ten warunek jest spełniony, to suma wyrazów tego ciągu wynosi $S = \frac{a_1}{1-q}$, gdzie a_1 to pierwszy wyraz ciągu.

W naszym przypadku mamy:

$$q = \frac{1}{2}x \text{ i } a_1 = x \text{ oraz } q = -\frac{1}{x} \text{ i } a_1 = \frac{1}{x}.$$

Zatem mamy nierówności:

$$\left|\frac{1}{2}x\right| < 1 \text{ i } \left|\frac{-1}{x}\right| < 1$$

oraz równanie:

(1)
$$\frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} + \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{-1}{x}} = 6\frac{2}{5}.$$

Z dwóch ostatnich nierówności wynika, że:

$$x \in (-2; 2) \text{ i } x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty),$$

czyli:

(2)
$$x \in (-2; -1) \cup (1; 2).$$

Rozwiązujemy równanie (1):

$$\frac{2x}{2-x} + \frac{1}{x+1} = 6\frac{2}{5}, \qquad / \cdot 5(2-x)(x+1)$$
$$10x(x+1) + 5(2-x) = 32(2-x)(x+1),$$
$$10x^2 + 5x + 10 = -32x^2 + 32x + 64,$$
$$47x^2 - 27x - 54 = 0, \qquad /:3$$
$$14x^2 - 9x - 18 = 0.$$

Obliczamy $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 14 \cdot (-18) = 1089$, skąd $\sqrt{\Delta} = 33$.

Zatem:

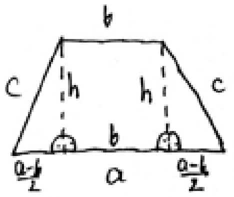
$$x_1 = \frac{9+33}{2\cdot 14} = \frac{42}{28} = 1\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{9-33}{2\cdot 14} = \frac{-24}{28} = \frac{-6}{7}.$$

Liczba x_1 spełnia założenie (2), a liczba x_2 nie spełnia go.

Odpowiedź: $x = 1\frac{1}{2}$.

Zadanie 8.

Spójrz na rysunek pod spodem.



Wiadomo, że w czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy, gdy sumy przeciwległych boków tego czworokąta są równe. Zatem:

$$c + c = a + b,$$

skąd:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, otrzymujemy równanie:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2,$$

czyli:

$$h^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Stąd $h^2 = ab$. Wobec tego $r = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$ (dlaczego?). Oczywiście $c = \frac{a+b}{2}$.

Zadanie 9.

Niech x i h oznaczają odpowiednio krawędź podstawy (kwadratu) oraz wysokość prostopadłościanu. Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu wynosi:

$$x^2 + 4xh + x^2 = 48,$$

czyli:

$$x^2 + 2xh = 24,$$

skąd:

$$h = \frac{24 - x^2}{2x}.$$

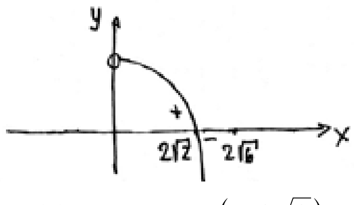
Objętość prostopadłościanu wynosi:

$$V = x^2 h = x^2 \cdot \frac{24 - x^2}{2x} = 12x - \frac{1}{2}x^3.$$

Obliczamy pochodną funkcji V:

$$V'(x) = 12 - \frac{3}{2}x^2 \text{ dla } x \in (0; 2\sqrt{6}), \text{ (dlaczego?).}$$

Rysujemy wykres $V'(x)$.



Mamy:

$$V'(x) > 0 \text{ dla } x \in (0; 2\sqrt{2}),$$
$$V'(x) < 0 \text{ dla } x \in (2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}),$$
$$V'(2\sqrt{2}) = 0.$$

Wobec tego w punkcie $x = 2\sqrt{2}$ mamy maksimum funkcji V.

Zatem $V_{\max} = V(2\sqrt{2}) = 16\sqrt{2}$.

Zadanie 10.

Wszystkich zdarzeń elementarnych jest tyle, ile ciągów (i,j,k), gdzie $i,j,k=1,2,3,4,5,6$, czyli.Ł

$$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216.$$

Wyznaczamy liczbę ciągów geometrycznych:

$(1,1,1)$; $(2,2,2)$; $(3,3,3)$; $(4,4,4)$; $(5,5,5)$; $(6,6,6)$ – są to ciągi geometryczne o ilorazie 1,

$(1,2,4)$; $(4,2,1)$ – są to ciągi o ilorazach odpowiednio $\frac{1}{2}$ oraz 2.

Zatem $\overline{\overline{A}} = 6+1+1 = 8$ (A – zdarzenie zawarte w treści zadania).

Mamy:

$$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{8}{216} = \frac{1}{27}.$$

Zadanie 11.

Równania podanych okręgów zapisujemy w postaci:

$$(x+m)^2+y^2=1 \quad \text{i} \quad (x+2)^2+y^2=1.$$

Środek pierwszego okręgu ma współrzędne $S_1(-m;0)$ i promień $r_1=1$.
Środek drugiego okręgu ma współrzędne $S_2(-2;0)$ i promień $r_2=1$.

(a) Styczność wewnętrzna.

Mamy wtedy warunek $|S_1S_2|=|r_1-r_2|$, czyli:

$$\sqrt{(-2-(-m))^2+(-1-(-1))^2} = |1-1|,$$
$$\sqrt{(-2+m)^2} = 0,$$
$$|m-2| = 0,$$
$$m=2.$$

Okręgi pokrywają się, ponieważ posiadają taki sam promień.

(b) Styczność zewnętrzna.

Mamy wtedy warunek $|S_1S_2|=|r_1+r_2|$, czyli:

$$\sqrt{(-2+m)^2+0^2} = |1+1|,$$
$$\sqrt{(m-2)^2} = 2,$$
$$|m-2| = 2,$$
$$m-2=2 \text{ lub } -(m-2)=2,$$
$$m=4 \text{ lub } m=0.$$

Zadanie 12.

Mamy równość $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ (dlaczego?). Stąd:

$$a_{n+1} = \left((n+1)^2+4(n+1)\right)-(n^2+4n) = (n^2+6n+5)-(n^2+4n) = 2n+5.$$

Niech $n>1$. Podstawmy $n-1$, zamiast n. Wtedy:

$$a_n=2(n-1)+5, \text{ czyli } a_n=2n+3 \text{ dla } n>1.$$

Wykażemy, że powyższy wzór jest również prawdziwy dla $n=1$. Istotnie:

$$a_1=S_1=1^2+4\cdot 1=5=2\cdot 1+3.$$

Witold Bednarek