# Bezwzględne

Zbadaj rozwiązania równania:

a) $|mx-1| = |x+1|$ ;  b) $|x^2-1| = m$ ;  c) $x^2 + 2m|x| + m^2 = 0$ .

**Rozwiązania:**

**(a)**

Mamy:

$$mx - 1 = x + 1 \quad \text{lub} \quad mx - 1 = -(x+1) \text{ (dlaczego?).}$$

Stąd kolejno otrzymujemy:

$$(m-1)x = 2 \quad \text{lub} \quad (m+1)x = 0.$$

Jeśli $m \neq 1$ , to pierwsze równanie ma rozwiązanie: $x = \frac{2}{m-1}$.

Jeśli $m = 1$, to pierwsze równanie jest sprzeczne: $0 = 2$.

Jeśli $m \neq -1$ , to drugie równanie ma rozwiązanie: $x = 0$.

Jeśli $m = -1$, to drugie równanie jest tożsamościowe: $0 = 0$.

Podsumowanie

Jeśli $m \neq 1$ i $m \neq -1$, to podane równanie ma dwa rozwiązania.

Jeśli $m = 1$, to mamy jedno rozwiązanie.

Jeśli $m = -1$, to mamy $\infty$ rozwiązań.

**(b).**

Jeśli $m < 0$, to podane równanie nie ma rozwiązania.

Jeśli $m = 0$, to mamy równanie $|x^2 - 1| = 0$, skąd $x^2 - 1 = 0$, czyli $x = 1$ lub $x = -1$.

Jeśli $m > 0$, to mamy alternatywę dwóch równań:

$$x^2 - 1 = m \text{ lub } x^2 - 1 = -m,$$

czyli

$$x^2 = m + 1 \text{ lub } x^2 = 1 - m.$$

1° $m \in (0,1)$, to $m + 1 > 0$ i $1 - m > 0$. Wtedy

$$x = \sqrt{m+1} \text{ lub } x = -\sqrt{m+1} \text{ lub } x = \sqrt{1-m} \text{ lub } x = -\sqrt{1-m}.$$

2° $m = 1$, wtedy $x^2 = 2$ lub $x^2 = 0$ , skąd $x = \sqrt{2}$, $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$.

3° $m \in (1, \infty)$, wtedy $x^2 = m + 1 > 0$ i $x^2 = 1 - m < 0$.

Pierwsze równanie ma dwa rozwiązania (jakie?), a drugie nie ma rozwiązań.

Podsumowanie

- $m \in (-\infty, 0)$, wtedy zero rozwiązań,
- $m = 0$, wtedy są dwa rozwiązania,
- $m \in (0,1)$, wtedy są cztery rozwiązania,
- $m = 1$, wtedy są trzy rozwiązania,
- $m \in (1, \infty)$, wtedy są dwa rozwiązania.

**(c).**

Mamy kolejno:

$$x^2 + 2m|x| + m^2 = 0,$$

$$|x|^2 + 2m|x| + m^2 = 0,$$

$$(|x| + m)^2 = 0,$$

$$|x| + m = 0,$$

$$|x| = -m.$$

Jeśli $-m > 0$, czyli $m < 0$, to mamy dwa rozwiązania: $x = -m$ lub $x = m$.

Jeśli $-m = 0$, czyli $m = 0$, to mamy jedno rozwiązanie: $x = 0$.

Jeśli $-m < 0$, czyli $m > 0$, to mamy zero rozwiązań.