Problemy nierówności

Zadanie 1.

Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $k, m > 0$ i dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \dots, a_n$ zachodzi nierówność:

$$\left(a_1^{k+m} + a_2^{k+m} + \dots + a_n^{k+m}\right)^2 \leqslant \left(a_1^{2k} + a_2^{2k} + \dots + a_n^{2k}\right)\left(a_1^{2m} + a_2^{2m} + \dots + a_n^{2m}\right).$$

Rozwiązanie

Zastosuj nierówność Schwarza opisaną w *Nie tylko dla orłów* z 66. wydania *Świata Matematyki*.

Zadanie 2.

Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1.$$

Rozwiązanie

Mnożymy obie strony podanej nierówności przez $(a + b)(b + c)(c + a) > 0$, dokonujemy redukcji, otrzymując nierówność równoważną:

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc > 0,$$

która jest oczywiście prawdziwa dla dodatnich a, b, c.

Zadanie 3.

Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że:

$$\frac{a^3}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{b^3}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{c^3}{c^3 + a^3 + abc} < 2.$$

Rozwiązanie

Skoro liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\frac{a^3}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{b^3}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{c^3}{c^3 + a^3 + abc} < \frac{a^3}{a^3 + b^3} + \frac{b^3}{b^3 + c^3} + \frac{c^3}{c^3 + a^3} < 2$$

na podstawie nierówności (2) zawartej w artykule *Pewne nierówności cykliczne* (*Świat Matematyki* nr 66), gdzie zamiast a, b, c są odpowiednio a^3, b^3, c^3.

Zadanie 4.

Niech a, b, c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że:

$$\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Rozwiązanie

Wykażemy najpierw, że

$$(\bullet)\quad \frac{x^2}{2x+y}\geqslant\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}y \text{ dla } x,y>0.$$

Istotnie, mamy kolejne nierówności równoważne:

$$x^2\geqslant(2x+y)\left(\frac{4}{9}x-\frac{1}{9}y\right),$$

$$x^2\geqslant\frac{8}{9}x^2+\frac{2}{9}xy-\frac{1}{9}y^2,$$

$$\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}xy+\frac{1}{9}y^2\geqslant 0,$$

$$\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\right)^2\geqslant 0,$$

co jest prawdą.

W nierówności (•) przyjmujemy kolejno: $x=a$ i $y=b$; $x=b$ i $y=c$; $x=c$ i $y=a$.
Następnie dodajemy stronami otrzymane nierówności.

Zadanie 5.

Niech a,b,c będą liczbami dodatnimi. Wykaż, że:

$$\frac{b-c}{a+b}+\frac{c-a}{b+c}+\frac{a-b}{c+a}\geqslant 0.$$

Rozwiązanie

Oznaczmy: $a+b=w,\ \ b+c=u,\ \ c+a=v$ (gdzie $u,v,w>0$). Stąd:

$$a=\frac{v+w-u}{2},\ \ b=\frac{u+w-v}{2},\ \ c=\frac{u+v-w}{2}.$$

Podana nierówność przyjmuje postać:

$$\frac{w-v}{w}+\frac{u-w}{u}+\frac{v-u}{v}\geqslant 0,$$

czyli

$$\left(1-\frac{v}{w}\right)+\left(1-\frac{w}{u}\right)+\left(1-\frac{u}{v}\right)\geqslant 0,$$

$$\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}\geqslant 3.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż wynika z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{\frac{u}{v}+\frac{v}{w}+\frac{w}{u}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\frac{u}{v}\cdot\frac{v}{w}\cdot\frac{w}{u}} = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Wystarczy pomnożyć obie strony powyższej nierówności przez 3.

Zadanie 6.

Wykaż, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b}+\frac{a^2+b^2}{c} \geqslant 2a+2b+2c.$$

Wskazówka: uzasadnij, że $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \geqslant x+y$ dla $x, y > 0$.

Rozwiązanie

Mamy $(x-y)^2 \geq 0$, skąd

$$x^2 - xy + y^2 \geq xy \quad |:(x+y),$$

czyli

$$x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2.$$

Stąd po podzieleniu przez $xy > 0$ otrzymujemy $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x} \geqslant x+y$.

Dalej przyjmujemy kolejno: $x = a$ i $y = b$; $x = b$ i $y = c$; $x = c$ i $y = a$ i dodajemy stronami odpowiednie nierówności

Zadanie 7.

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Wykaż, że:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Rozwiązanie

Mamy:

$$\frac{a}{a+1} = \frac{(a+1)-1}{a+1} = 1-\frac{1}{a+1};\ \frac{b}{b+1} = 1-\frac{1}{b+1};\ \frac{c}{c+1} = 1-\frac{1}{c+1}.$$

Zatem podana nierówność przyjmuje postać

$$3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right) \leqslant \frac{3}{4},$$

czyli

$$(*) \quad \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geqslant \frac{9}{4}.$$

Stosując nierówność (5) zawartą w *Pewne nierówności cykliczne* z 66. wydania *Świata Matematyki*, czyli

$$(**) \quad (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geqslant 9 \text{ dla } x, y, z > 0,$$

mamy

$$\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)((a+1)+(b+1)+(c+1)) \geqslant 9.$$

Po skorzystaniu z warunku $a + b + c = 1$ otrzymujemy:

$$\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)\cdot 4 \geqslant 9,$$

co daje nierówność (*), którą mieliśmy udowodnić.

Zadanie 8.

Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 3$. Wykaż, że:

$$\frac{a^2+1}{a+1} + \frac{b^2+1}{b+1} + \frac{c^2+1}{c+1} \geqslant 3.$$

Rozwiązanie

Mamy:

$$\frac{a^2+1}{a+1} = \frac{(a^2-1)+2}{a+1} = \frac{a^2-1}{a+1} + \frac{2}{a+1} = a - 1 + \frac{2}{a+1}.$$

Analogicznie:

$$\frac{b^2+1}{b+1} = b - 1 + \frac{2}{b+1} \quad \text{i} \quad \frac{c^2+1}{c+1} = c - 1 + \frac{2}{c+1}.$$

Zatem:

$$\frac{a^2+1}{a+1} + \frac{b^2+1}{b+1} + \frac{c^2+1}{c+1} = (a+b+c) - 3 + \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1} = 3 - 3 + \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1} =$$

$$= \frac{2}{a+1} + \frac{2}{b+1} + \frac{2}{c+1} \geqslant 2 \cdot \frac{9}{(a+1)+(b+1)+(c+1)} = 2 \cdot \frac{9}{3+3} = 3$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności (**) zawartej w rozwiązaniu poprzedniego zadania.

Zadanie 9.

Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych $k, m \geq 1, n \geq 2$ oraz liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{ka^n + mb^n}{a+b} + \frac{kb^n + mc^n}{b+c} + \frac{kc^n + ma^n}{c+a} \geqslant \frac{1}{2}(k+m)(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}).$$

Rozwiązanie

Na podstawie **Zadania 3.** z artykułu *Nierówności* w 66. numerze *Świata Matematyki* możemy zapisać, że:

$$(*) \quad \frac{ka^n}{a+b} + \frac{kb^n}{b+c} + \frac{kc^n}{c+a} \geqslant \frac{1}{2}k(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}).$$

W podanym **Zadaniu 3.** zamieniamy: a z b; b z c i c z a, otrzymując nierówność:

$$\frac{b^n}{b+a} + \frac{c^n}{c+b} + \frac{a^n}{a+c} \geqslant \frac{b^{n-1} + c^{n-1} + a^{n-1}}{2}.$$

Powyższą nierówność mnożymy przez m:

$$\frac{mb^n}{b+a} + \frac{mc^n}{c+b} + \frac{ma^n}{a+c} \geqslant \frac{1}{2}m(b^{n-1} + c^{n-1} + a^{n-1}).$$

Wystarczy teraz dodać stronami powyższą nierówność oraz nierówność (*).

Zadanie 10.

Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz liczb dodatnich a, b, c spełniających warunek $abc = 1$, zachodzi nierówność:

$$\frac{a^n+1}{a+1}+\frac{b^n+1}{b+1}+\frac{c^n+1}{c+1} \geqslant 3.$$

Rozwiązanie

Dla liczby dodatniej x zachodzi nierówność:

$$\frac{x^n+1}{x+1} \geqslant \frac{x^{n-1}+1}{2},$$

co Czytelnik zechce uzasadnić. Zatem:

$$(**) \quad \frac{a^n+1}{a+1}+\frac{b^n+1}{b+1}+\frac{c^n+1}{c+1} \geqslant \frac{1}{2}\left(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+3\right).$$

Na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy:

$$\frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^{n-1}\, b^{n-1}\, c^{n-1}} = \sqrt[3]{(abc)^{n-1}} = \sqrt[3]{1^{n-1}} = 1.$$

Stąd i z nierówności (**) wynika żądana nierówność.