Liczby i kąty

Zadanie 1.

Udowodnij, że dla wszystkich liczb całkowitych x, wartość wyrażenia:

$$x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$$

jest dokładną wielokrotnością liczby 8640.

Rozwiązanie

Niech $f(x) = x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$. Rozkładając na czynniki f(x), mamy:

$$f(x) = x^3 \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 2).$$

Jeżeli $x = 3p$, wtedy f(x) jest podziela przez $(3p)^3 = 27 \cdot p^3$
Jeżeli $x = 3p + 2$, wtedy f(x) jest podziela przez $(3p + 3)^2 \cdot (3p) = 27 \cdot p \cdot (p + 1)^2$. Zatem, f(x) jest zawsze podzielna przez 27 …. (i)

I ponownie, $f(x) = x^2 (x^2 - 1) \cdot g(x)$, gdzie:

$$g(x) = (x + 2) \cdot (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2).$$

Ponieważ f(x) jest podzielna przez iloczyn pięciu kolejnych liczb całkowitych, to z tego wynika, że f(x) musi zawsze być podzielne przez 5 ….(ii)

Jeżeli x jest parzysty, wtedy $x = 4p$ lub $x = (4p + 2)$
Dla $x = 4p$, f(x) jest podzielne przez $(4p)^3 \cdot (4)$, tak więc f(x) jest podzielne przez 256.
Dla $x = 4p+2$, f(x) jest podzielne przez $128 \cdot (2p + 1)^3 \cdot p(p + 1)$, tak więc f(x) jest podzielne przez $128 \cdot 2 = 256$.

W takim razie f(x) jest podzielne przez 256, oraz f(x) jest parzyste.
Jeżeli x jest nieparzyste, wtedy $x^2 – 1$ jest podzielne przez 8. Niech $(x^2 - 1)/8 = M$. Następnie piszemy:

$$f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot (x^2 - 4),$$

i zauważmy, że:

f(x) jest podzielne przez $64 \cdot M^2$,

tak więc f(x) jest podzielne przez 64, zawsze gdy x jest nieparzyste. Zatem, f(x) jest zawsze podzielne przez 64 ….(iii)

Łącząc (i), (ii), (iii), widzimy, że ogólnie rzecz biorąc f(x) jest dokładną wielokrotnością najmniejszej wspólnej wielokrotności (27, 5, 64) = 8 640.

Zadanie 2.

Udowodnij, że w trójkącie ostrokątnym: $\sin(A) + \sin(B) + \sin(C) > 2$.

Rozwiązanie

Każdy z kątów ABC (lub B), BCA (lub C) oraz CAB (lub A) w trójkącie ABC jest ostry. Odpowiednio do tego środek okręgu opisanego (o środku E), musi leżeć wewnątrz tego trójkąta. Niech X, Y oraz Z odpowiednio oznaczają punkty środkowe BC, CA oraz AB. Wynika z tego, że E musi być położony wewnątrz jednego z czworoboków BCYZ, CAZX, lub ABXY.

Możemy założyć, że E jest położony wewnątrz BCYZ.

Niech R będzie długością promienia okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy:

$$2R = BE + EC$$

Ponieważ trójkąty AZY oraz ABC są podobne, przy czym $BZ = \frac{AB}{2}$, oraz $AY = \frac{AC}{2}$, to musi zachodzić: $ZY = \frac{BC}{2}$.

Można zatem łatwo wykazać, że:

$$BE + EC < BZ + ZY + YC = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + AC)$$

lub

$$2R < R \cdot (\sin A + \sin B + \sin C),$$ zgodnie z twierdzeniem sinusów.

lub

$$\sin A + \sin B + \sin C > 2.$$

Zadanie 3.

Wyznacz wszystkie możliwe liczby pierwsze p takie, iż każda wartość $p - 8$, $p - 4$, $p + 8$ oraz $p + 12$ jest także liczbą pierwszą.

Rozwiązanie

Tylko $p = 11$ spełnia wymagania problemu.

Wyjaśnienie:

Zastąpmy $p - 8 = q$, czyli:

$$(p-8, p-4, p+8, p+12) = (q, q+4, q+16, q+20)$$

- Jeżeli $q \pmod 3 = 0$, wtedy q nie jest liczbą pierwszą, chyba, że $q = 3$.

- Jeżeli $q \pmod 3 = 1$, wtedy $q + 20$ jest podzielne przez 3, czyli jest wartością złożoną (rozkładalną na czynniki pierwsze). Stanowi to sprzeczność.

- Jeżeli $q \pmod 3 = 2$, wtedy każde z $q + 4$ oraz $q + 16$ jest podzielne przez 3, czyli obie są wartościami złożonymi (rozkładalnymi na czynniki pierwsze). Stanowi to sprzeczność.

Stosownie do powyższego $q = 3$, tak więc $p - 8 = 3$, czyli $p = 11$ jest jedynym możliwym rozwiązaniem problemu.