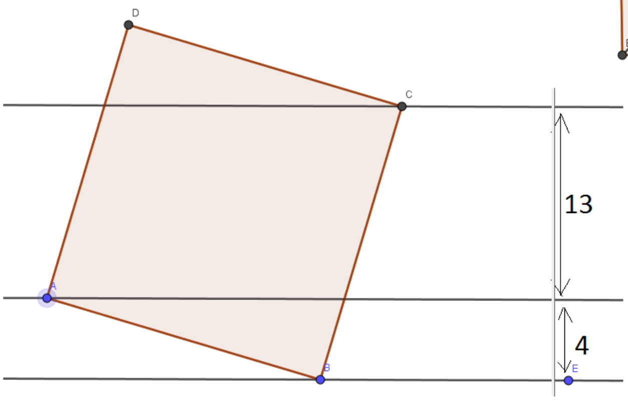
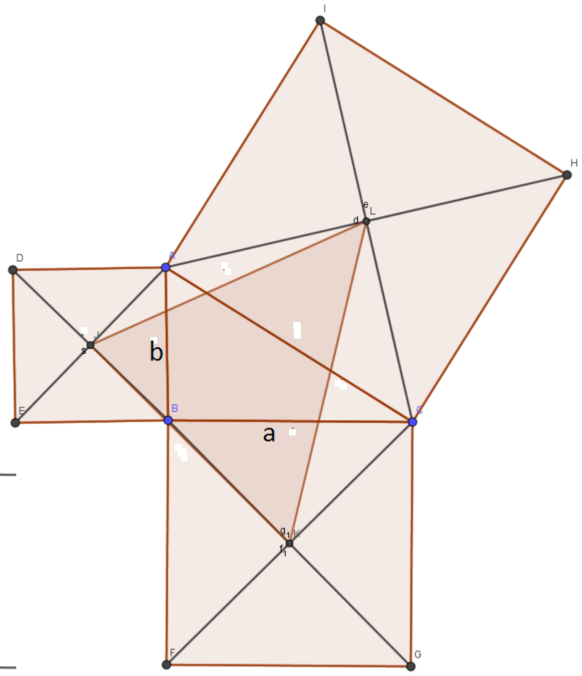
Trójkąt i kwadrat

Dany jest kwadrat i trójkąt, jak na rysunkach poniżej. Oblicz pole kwadratu oraz długości boków trójkąta ΔABC, którego wierzchołki leżą na przecięciu przekątnych kwadratów.

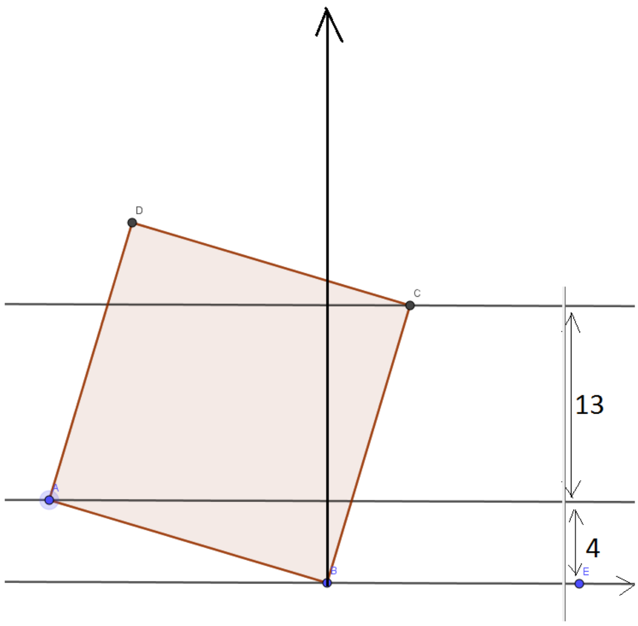




Rozwiązanie

1. Kwadrat

Umieśćmy kwadrat tak, by wierzchołek B znajdował się w początku układu współrzędnych i by jedna z osi pokrywała się z najniższą prostą



$$\overrightarrow{BC} = a + 17i$$

$$\overrightarrow{BA} = c + 4i$$

Ponieważ ABCD jest kwadratem więc:

$$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA} \quad i \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{BA}\right|$$

Przypominamy, że mnożenie wektora przez i powoduje jego obrót o 90° czyli:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} \cdot i$$

$$c + 4i = (a + 17i) \cdot i$$

$$c + 4i = ai - 17$$

Stąd wynika, że:

$$a = 4$$

$$c = -17$$

Wierzchołki kwadratu mają więc współrzędne:

$$A = (-17; 4)$$

$$B = (0; 0)$$

$$C = (4; 17)$$

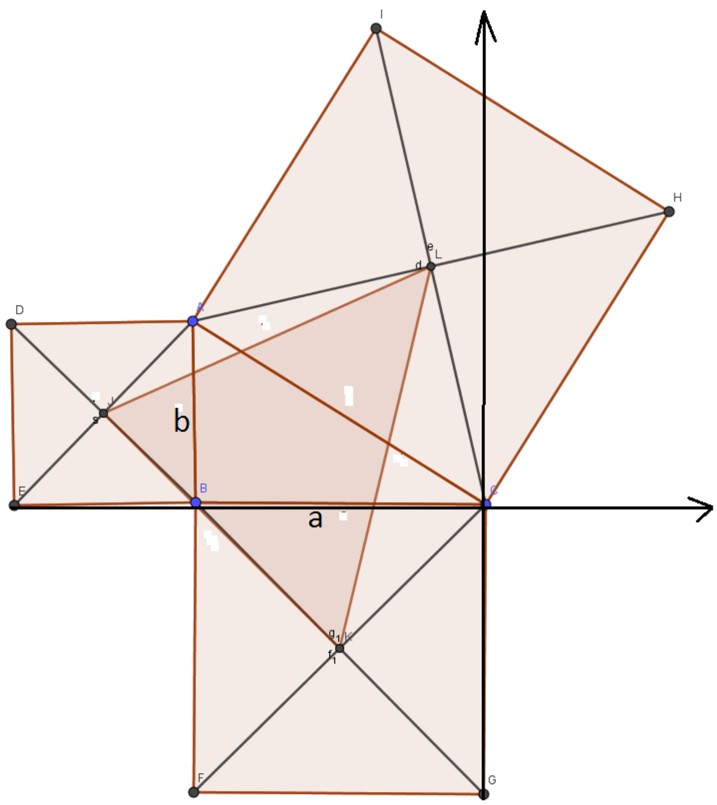
$$D = (-13; 21)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17^2 + 4^2} = \sqrt{289 + 16} = \sqrt{305}$$

$$P_{ABCD} = 305$$

2. Trójkąt

Umieśćmy trójkąt prostokątny w układzie współrzędnych, tak, by wierzchołek C trójkąta leżał w początku układu współrzędnych a prostopadłe boki trójkąta prostokątnego były równoległe do osi układu współrzędnych



Wówczas

$$J = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{1}{4}c;\ \frac{1}{4}c\right) = \left(-\frac{2\sqrt{3}+1}{4}c;\ \frac{1}{4}c\right)$$

$$K = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}c;\ -\frac{\sqrt{3}}{4}c\right)$$

Pozostaje do wyznaczenia wierzchołek L. Wyznaczmy wpierw wierzchołki kwadratu ACHI

$$\overrightarrow{CA} = -a + bi$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CA} \cdot (-i) = (-a + bi) \cdot (-i) = ai + b$$

$$\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CH} = -a + bi + b + ai = -a + b + (a + b)i$$

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2} \cdot (b - a + (a + b)i) = \frac{b - a}{2} + \frac{a + b}{2}i$$

$$L = \left(\frac{b - a}{2};\ \frac{a + b}{2}\right) = \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{4}c;\ \frac{1 + \sqrt{3}}{4}c\right)$$

$$|JK| = \frac{\sqrt{2}(a+b)}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}c$$

$$|KL| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}c - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}c\right)\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}c - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}c\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{16}c^2 + \frac{13+4\sqrt{3}}{16}c^2} = \sqrt{\frac{14+4\sqrt{3}}{16}c^2} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{7+2\sqrt{3}}{2}}$$

$$|JL| = \sqrt{\left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}c - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{1}{4}c\right)\right)^2 + \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}c - \frac{1}{4}c\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}c\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4\sqrt{3}+3}{16}c^2 + \frac{3}{16}c^2} = \sqrt{\frac{10+4\sqrt{3}}{16}c^2} =$$

$$= \frac{c}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{3}}{2}}$$