

## Zadania tysiąca

**Zadanie 1.**

Tysiąc rur ułożono w stos w kształcie pryzmy. Oblicz:

- Ile warstw będzie miał stos, jeśli wiadomo, że w każdej następnej warstwie jest o jedną rurę mniej niż w warstwie poprzedniej;
- Ile rur będzie w najniższej warstwie;
- Ile rur będzie w najwyższej warstwie;
- Ile rur brakuje do pełnej pryzmy (by ostatnia górna warstwa miała jedną rurę i spoczywała na warstwie składającej się z dwóch rur).

**Rozwiązanie**

$$1000 \leq \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2 + n}{2}$$

Należy rozwiązać nierówność:

$$\frac{n^2 + n}{2} \geq 1000$$

$$n^2 + n - 2000 \geq 0$$

Rozwiążmy równanie

$$n^2 + n - 2000 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2000 = 8001$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{8001}$$

$$n = \frac{-1 - \sqrt{8001}}{2} < 0 \quad \text{lub} \quad n = \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$

W takim razie

$$n \geq \frac{-1 + \sqrt{8001}}{2}$$

Ponieważ

$$89 < \sqrt{8001} < 90$$

Więc mamy kolejno

$$88 < \sqrt{8001} - 1 < 89$$

$$44 < \frac{\sqrt{8001} - 1}{2} < 44,5$$

Oznacza to, że w dolnej warstwie będzie 45 rur.

Ponieważ

$$\frac{45^2 + 45}{2} = \frac{2025 + 45}{2} = \frac{2070}{2} = 1035$$

$$1035 - 1000 = 35$$

Co oznacza, że do pełnej pryzmy zabraknie 35 rur.

Ponieważ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

Oznacza to, że do pełnej pryzmy składającej się z 45 warstw zabraknie siedmiu górnych warstw, czyli układanie zakończy się na warstwie 38 w której powinno być 8 rur. Jednak warstwa ta będzie nie pełna i będzie w niej tylko 1 rura.

**Zadanie 2.**

Tysiąc pomarańczy próbowano ułożyć w piramidę o podstawie w kształcie trójkąta równobocznego. Oblicz

- na której warstwie zakończono układanie piramidy;
- ile pomarańczy było w dolnej warstwie
- ile pomarańczy było w górnej warstwie
- ile pomarańczy brakuje by ich ilość była liczbą czworościenną

**Rozwiązanie**

Popatrzmy na poniższą tabelkę

numer warstwy licząc od góry	ilość kul w ajniższej warstwie	ilość kul w całej piramidzie
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56
7	28	84
8	36	120
9	45	165
10	55	220
11	66	286
12	78	364
13	91	455
14	105	560
15	120	680
16	136	816
17	153	969
18	171	1140

Jak widać, pełna czworościenna piramida powinna mieć 18 warstw. W najniższej warstwie będzie 171 pomarańczy. Do pełnej piramidy brakuje jednak 140 pomarańcz. Czyli pomarańcz starczy na  $18 - 8 = 10$  warstw, przy czym 10 warstwa będzie nie pełna. Powinna mieć 45 pomarańczy, a będzie miała 25 pomarańczy.

### Zadanie 3.

Tysiąc pomarańczy próbowano ułożyć w piramidę o podstawie kwadratu. Oblicz

- na której warstwie zakończono układanie piramidy
- ile pomarańczy było w dolnej warstwie
- ile pomarańczy było w górnej warstwie
- ile pomarańczy brakuje, by ich ilość była liczbą piramidalną

### Rozwiązanie

Jak poprzednio popatrzymy do tabeli

ilość warstw licząc od góry	ilość kul w najniższej warstwie	ilość kul w całej piramidzie
1	1	1
2	4	5
3	9	14
4	16	30
5	25	55
6	36	91
7	49	140
8	64	204
9	81	285
10	100	385
11	121	506
12	144	650
13	169	819
14	196	1015

Tym razem piramida powinna składać się z 14 warstw. Najniższa warstwa powinna mieć 196 pomarańcz. Do pełnej piramidy brakuje 15 pomarańcz, czyli trzech warstw. Budowa piramidy zakończy się na 11 warstwach. Ostatnia warstwa powinna mieć 16 pomarańcz, a będzie miała 15.