Płaskie odległości

Zadanie 1.

Dany jest trójkąt ABC. Znajdź taki punkt P, aby suma kwadratów odległości punktu P od wierzchołków A, B i C była najmniejsza.

Rozwiązanie

Wprowadźmy układ współrzędnych i oznaczmy A (a_1, a_2), B (b_1, b_2), C (c_1, c_2) oraz P (x, y). Mamy:

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = ((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2) + ((x - b_1)^2 + (y - b_2)^2) + ((x - c_1)^2 + (y - c_2)^2).$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3x^2 - 2(a_1 + b_1 + c_1)x + 3y^2 - 2(a_1 + b_1 + c_1)y + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$$

Rozważmy funkcję kwadratową $f(t) = 3t^2 - 2dt$. Funkcja ta osiąga swe minimum dla $t = \frac{-(-2d)}{2\cdot 3} = \frac{d}{3}$. Zatem poszukiwane minimum sumy kwadratów odległości jest osiągnięte dla:

$$x = \frac{a1 + b1 + c1}{3} \text{ oraz } y = \frac{a2 + b2 + c2}{3}.$$

Punkt $P(\frac{a1 + b1 + c1}{3}, \frac{a2 + b2 + c2}{3})$ jest środkiem trójkąta ABC, czyli punktem przecięcia jego środkowych, co Czytelnik zechce udowodnić.

Zadanie 2.

W kwadracie o boku 10 cm obrano dowolnie 201 punktów. Wykaż, że istnieją takie trzy punkty znajdujące się w kole o promieniu $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

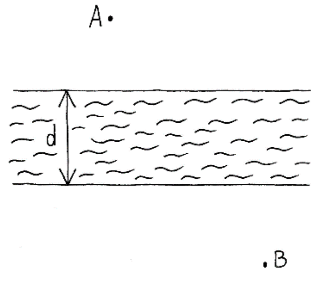
Rozwiązanie

Dzielimy prostymi poziomymi i pionowymi kwadrat o boku 10 cm na sto kwadratów o boku 1 cm. W przynajmniej w jednym z tych kwadratów znajda się trzy wyróżnione punkty. Gdyby tak nie było, to liczba wyróżnionych kwadratów byłaby mniejsza od 201 (dlaczego?).

Kwadrat zawierający trzy wyróżnione punkty jest zawarty w kole na nim opisanym, o promieniu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (dla czego)? Ta uwaga kończy rozwiązanie.

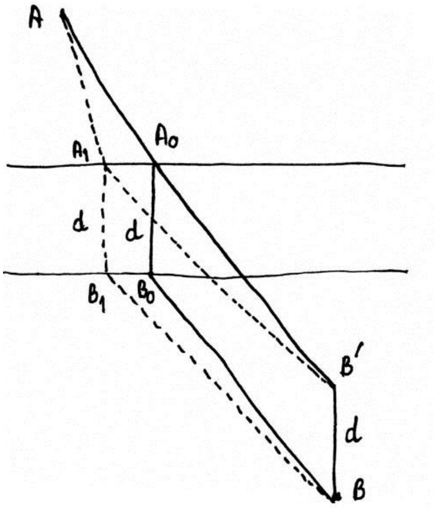
Zadanie 3.

Po przeciwnych stronach rzeki o szerokości *d* znajdują się punkty *A* i *B*, jak na rysunku. W którym miejscu należy zbudować most (prostopadły do brzegów rzeki), aby poprowadzić najkrótszą drogę łączącą punkty *A* i *B*?



Rozwiązanie

Proszę spojrzeć na rysunek.



Czworokąty $B_0BB'A_0$ i $B_1BB'A_1$ są równoległobokami. Punkty A, A_0 , B' są współliniowe.
Niech L_0 i L_1 oznaczają odpowiednio najkrótszą i dowolna inną drogę. Mamy:

$$L_0 = AA_0 + A_0B_0 + B_0B = AA_0 + d + B_0B = AA_0 + d + A_0B' = AA_0 + A_0B' + d = AB' + d;$$
$$L_1 = AA_1 + A_1B_1 + B_1B = AA_1 + d + B_1B = AA_1 + d + A_1B' = AA_1 + A_1B' + d = AB' + d.$$

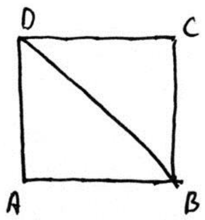
Z nierówności trójkąta wynika, że:
$AA_1 + A_1B' > AB'$,
a zatem $L_1 > L_0$. Wobec tego droga $AA_0 + A_0B_0 + B_0B$ jest najkrótsza.

Zadanie 4.

Wykaż, że dla dowolnego czworokąta wypukłego stosunek największej odległości między wierzchołkami do najmniejszej jest równy co najmniej $\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Niech A, B, C, D będą wierzchołkami czworokąta wypukłego. Co najmniej jeden z kątów czworokąta jest nie mniejszy od 90^o. Niech będzie to na przykład kąt przy wierzchołku A (patrz rysunek).



Mamy wtedy $|BD|^2 \geq |AB|^2 + |AD|^2$ (dlaczego?).

Niech y oznacza długość najdłuższej przekątnej, zaś x – długość najkrótszego boku. Mamy zatem:

$$y^2 \geq |BD|^2 \geq |AB|^2 + |AD|^2 \geq x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\text{Stąd } y^2 \geq 2x^2 \text{, a więc } \frac{x}{y} \geq \sqrt{2}.$$

Zadanie 5.

Dany jest czworokąt wypukły o polu 1 cm^2. Wykaż, że co najmniej jedna z jego przekątnych ma długość nie mniejszą niż $\sqrt{2}$ cm.

Rozwiązanie

Znany jest wzór na pole P czworokąta o przekątnych d_1 i d_2 oraz kącie α, zawartym między nimi, a mianowicie

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha.$$

Skoro $\sin\alpha \leq 1$, to $P \leq \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Ponieważ P = 1 (cm^2), to $1 \leq \frac{1}{2} d_1 d_2$, czyli $d_1 d_2 \geq 2$.

Zatem $d_1 \geq \sqrt{2}$ (cm) lub $d_2 \geq \sqrt{2}$ (cm).