Chińskie problemy

Zadanie 1.

Podaj najmniejszą taką liczbę naturalną $m > 1$, że:

$$m \equiv 1 \pmod 2;\ m \equiv 1 \pmod 3;\ m \equiv 1 \pmod 5;\ m \equiv 1 \pmod 7.$$

Odpowiedź: $m = 1 + 2 * 3 * 5 * 7 = 211$.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są różnymi liczbami pierwszymi i istnieją takie liczby naturalne $m_1, m_2, \ldots, m_k$, że:

$$p_1 \mid m_1^2 + 1,\ p_2 \mid m_2^2 + 1, \ldots,\ p_k \mid m_k^2 + 1,$$

to istnieje taka liczba naturalna m, że:

$$p_1 p_2 \ldots p_k \mid m^2 + 1.$$

Rozwiązanie

Na mocy twierdzenia chińskiego o resztach istnieje taka liczba naturalna m, że

$$m \equiv m_i \pmod{p_i} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Stąd

$$m^2 + 1 \equiv m_i^2 + 1 \pmod{p_i} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Na podstawie założenia zadania mamy

$$m_i^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p_i} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Zatem

$$m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p_i} \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Tym samym

$$p_i \mid m^2 + 1 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Skoro $p_1, p_2, \ldots, p_k$ są liczbami pierwszymi, to

$$p_1 p_2 \ldots p_k \mid m^2 + 1,$$

a to mieliśmy udowodnić.