Zadanie doskonałe

Zadanie 1.

Niech p ($p > 2$) będzie liczbą pierwszą (nieparzystą) oraz $n \geq 1$ będzie liczbą naturalną. Wykaż, że liczba p^n nie jest doskonała.

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że liczba p^n jest doskonała. Wtedy zgodnie z definicją mamy równość

$$S(p^n) = 2p^n,$$

czyli

$$1 + p + \ldots + p^n = 2p^n.$$

Z powyższej równości wynika, że p jest dzielnikiem 1 (dlaczego?).
Zatem musi być $p = 1$, co jest niemożliwe.

Zadanie 2.

Wyznacz wszystkie liczby pierwsze $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$ ($n \geq 2$), dla których liczba $p_1p_2\ldots p_n$ jest doskonała.

Rozwiązanie

SPOSÓB I.
Zgodnie z definicją mamy równanie

$$S(p_1p_2\ldots p_n) = 2p_1p_2\ldots p_n, \text{ czyli}$$

$$(*) \qquad (p_1+1)(p_2+1)\ldots(p_n+1) = 2p_1p_2\ldots p_n.$$

Prawa strona powyższego równania jest podzielna przez 2.
Zatem jedna z liczb: $p_1+1, p_2+1, \ldots, p_n+1$ jest parzysta.

1° $p_1 > 2$.
Wtedy liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są nieparzyste (dlaczego?).
Zatem lewa strona równania (*) jest podzielna przez $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n \text{ czynników}} = 2^n$.
Tym samym 2^n jest dzielnikiem liczby $2p_1p_2\ldots p_n$.
Jest to jednak niemożliwe przy $n \geq 2$, gdyż liczby $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są nieparzyste.

2° $p_1 = 2$.
Wtedy równanie (*) przyjmuje postać

$$(**) \qquad 3(p_2+1)\ldots(p_n+1) = 4p_2\ldots p_n.$$

Ponieważ liczby $p_2+1, \ldots, p_n+1$ są parzyste, to iloczyn $(p_2+1)\ldots(p_n+1)$ jest podzielny przez $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n} = 2^n$. Tym samym 2^n jest dzielnikiem $4p_2\ldots p_n$.
Skoro liczby $p_2, \ldots, p_n$ są nieparzyste, to musi być $n = 2$ (dlaczego?). Równanie (**) przyjmuje postać $3(p_2+1) = 4p_2$, skąd $p_2 = 3$. Odp. $p_1 = 2$ i $p_2 = 3$ ($n = 2$).

SPOSÓB II.

Zajmiemy się równaniem (*). Wynika z niego, że

$$p_1 p_2 \dots p_n \mid (p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1).$$

Przypuśćmy, że $n \geqslant 3$. Z podzielności tej wynika, że

$$p_n \mid (p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1).$$

Ponieważ p_n jest liczbą pierwszą, to

$$p_n \mid p_i+1 \text{ dla pewnego } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (**)$$

Nie może być $i=n$ (dlaczego?). Zatem $i \leqslant n-1$

Z podzielności (**) mamy oczywiście $p_n \leqslant p_i+1$.

Skoro $i \leqslant n-1$, to $p_n \leqslant p_{n-1}+1$, czyli $p_n - p_{n-1} \leqslant 1$.
Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $p_n = 3$ i $p_{n-1}=2$ (dlaczego?).
Mamy przy tym $n=2$. Sprawdzamy, że są to rozwiązania na podstawie (*).

Uwaga

Równość $S(p_1 p_2 \dots p_n) = (p_1+1)(p_2+1)\dots(p_n+1)$ wynika z równości zawartej w artykule „O sumie" z 48. (2/2018) wydania „Świata Matematyki"