szkic rozwiązania - Witold Bednarek

Nie tylko całka

Zadanie 1.

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 1$ zachodzą nierówności:

a) $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\ldots+\dfrac{1}{2m}<\dfrac{7}{10}$, b) $\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m+2}+\ldots+\dfrac{1}{3m}<\dfrac{1}{2}$,

c) $\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\ldots+\dfrac{1}{3m}<\dfrac{11}{10}$, d) $\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m+2}+\ldots+\dfrac{1}{5m}<1$.

Rozwiązanie

Zastosujemy nierówność

$$\frac{1}{ma+1}+\frac{1}{ma+2}+\ldots+\frac{1}{mb}<\ln\frac{b}{a},$$

dla naturalnych $b>a>0$ oraz $m>0$, podaną w opracowaniu *II. Nierówność z ułamkami* z *Nie tylko dla orłów* (13).

(a) Mamy $a=1$, $b=2$ i korzystamy z faktu, że $\ln\dfrac{b}{a}=\ln 2\approx 0,6931<\dfrac{7}{10}$.

(b) Mamy $a=2$, $b=3$ i korzystamy z faktu, że $\ln\dfrac{b}{a}=\ln 1,5\approx 0,4055<\dfrac{1}{2}$.

(c) Mamy $a=1$, $b=3$ i korzystamy z faktu, że $\ln\dfrac{b}{a}=\ln 3\approx 1,0986<1\dfrac{1}{10}$.

(d) Mamy $a=2$, $b=5$ i korzystamy z faktu, że $\ln\dfrac{b}{a}=\ln 2,5\approx 0,9163<1$.

Zadanie 2.

Uzasadnij, że dla każdej liczby naturalnej $m \geqslant 1$ zachodzą nierówności:

a) $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\ldots+\dfrac{1}{2m}>\dfrac{2}{3}$, b) $\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m+2}+\ldots+\dfrac{1}{3m}>\dfrac{2}{5}$,

c) $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\ldots+\dfrac{1}{3m}>1$, d) $\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m+2}+\ldots+\dfrac{1}{5m}>\dfrac{9}{10}$.

Rozwiązanie

Zastosujemy nierówność:

$$\frac{1}{ma}+\frac{1}{ma+1}+\ldots+\frac{1}{mb}>\ln\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{ma}\right)$$

dla tych samych par a, b co w poprzednim rozwiązaniu. Mamy:

(a) $\ln\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ma}\right)=\ln\left(2+\dfrac{1}{m}\right)>\ln 2\approx 0,6931>\dfrac{2}{3}$,

(b) $\ln\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ma}\right)=\ln\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2m}\right)>\ln 1,5\approx 0,4055>\dfrac{2}{5}$,

(c) $\ln\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ma}\right)=\ln\left(3+\dfrac{1}{m}\right)>\ln 3\approx 1,0986>1$,

(d) $\ln\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{1}{ma}\right)=\ln\left(2,5+\dfrac{1}{m}\right)>\ln 2,5\approx 0,9163>\dfrac{9}{10}$.

Zadanie 3.

Uzasadnij, że:

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Rozwiązanie

Krzywa o równaniu $x^2+y^2=1$ dla $x,y\in<0,1>$ przedstawia ¼ okręgu o środku w początku układu współrzędnych w I ćwiartce. Stąd $y=\sqrt{1-x^2}$ dla $x,y\in<0,1>$. Z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej wnosimy, że:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

jest polem jednej czwartej koła o promieniu 1.

Uwaga

Dla porównania podajemy drugi (bardziej skomplikowany) sposób rozwiązania:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 4.

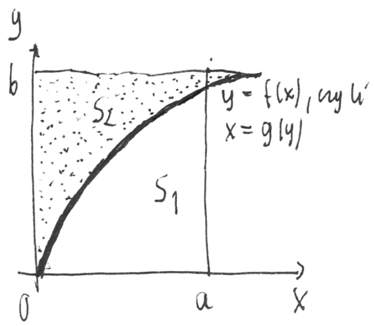
Niech $c>0$ i $f:\langle 0,c\rangle \longmapsto \langle 0,\infty)$ będzie funkcją ciągłą i rosnącą oraz $f(0)=0$. Niech $a\in\langle 0,c\rangle$ i $b\in\langle 0,f(c)\rangle$ oraz g będzie funkcją odwrotną do f, tzn. $g(f(x))=x$ dla $x\in<0,a>$. Wykaż nierówność Younga:

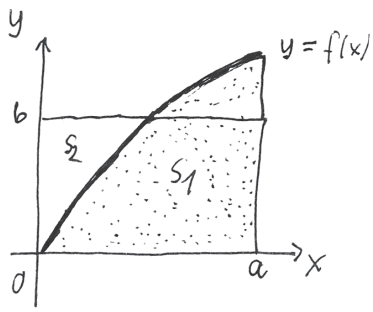
$$\int_0^a f(x)dx + \int_0^b g(x)dx \geqslant ab.$$

Rozwiązanie

Skorzystamy z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej. Rozważmy wykresy funkcji $y=f(x)$ i $x=g(y)$ w tym samym układzie współrzędnych, porównując sumę dwóch pól pod wykresami funkcji f i g z polem prostokąta o wymiarach $a \times b$.

Możliwe są dwa przypadki:





$$S_1 = \int_0^a f(x)dx, \qquad S_2 = \int_0^b g(y)dy = \int_0^b g(x)dx.$$

Zauważmy, że $S_1+S_2 \geqslant ab$ (pole prostokąta).

Zadanie 5.

Niech $0<a<b$ i $f(x)=x^n$ $(n\in N)$. Znajdź takie $c\in(a,b)$, że:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c).$$

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$\int_0^b x^n dx = (b-a)c^n,$$

$$\left[\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\right]_a^b = (b-a)c^n,$$

$$\frac{1}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1}) = (b-a)c^n,$$

$$c^n = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a},$$

$$c^n = \frac{1}{n+1}\cdot(b^n+b^{n-1}a+\ldots+ba^{n-1}+a^n),$$

$$c = \sqrt[n]{\frac{b^n+b^{n-1}a+\ldots+ba^{n-1}+a^n}{n+1}}.$$

Zadanie 6.

Korzystając z opracowania *Stała Eulera i jej uogólnienie*, za pomocą komputera znajdź przybliżone wartości stałych γ_α dla:

$$\alpha=\frac{1}{3},\ \alpha=\frac{1}{2},\ \alpha=\frac{2}{3}.$$

Rozwiązanie

Przybliżone wartości stałych γ_α, wyznaczone przy pomocy programu komputerowego *Wolfram Alpha,* dla $n=1000$:

$$\gamma_{\frac{1}{3}}=0{,}5,\ \gamma_{\frac{1}{2}}=0{,}54,\ \gamma_{\frac{2}{3}}=0{,}552.$$

Zadanie 7.

Niech $0<a<b$ oraz $k\in(0,1)$. Wykaż, że:

$$(b^{1+k}-a^{1+k})(b^{1-k}-a^{1-k})\geqslant(1-k^2)(b-a)^2.$$

Wskazówka: skorzystaj z nierówności Schwarza dla całek i funkcji $f(x)=x^{\frac{k}{2}}$ i $g(x)=x^{-\frac{k}{2}}$ dla $k>0$.

Rozwiązanie

Mamy kolejno:

$$\left(\int_a^b \left(x^{\frac{k}{2}}\cdot x^{\frac{-k}{2}}\right)dx\right)^2\leqslant\int_a^b \left(x^{\frac{k}{2}}\right)^2dx\cdot\int_a^b \left(x^{\frac{-k}{2}}\right)^2dx,$$

$$\left(\int_a^b 1dx\right)^2\leqslant\int_a^b x^k dx\cdot\int_a^b x^{-k}dx,$$

$$([x]_a^b)^2\leqslant\left[\frac{1}{1+k}\cdot x^{k+1}\right]_a^b\cdot\left[\frac{1}{1-k}\cdot x^{1-k}\right]_a^b,$$

$$(b-a)^2\leqslant\frac{1}{1+k}\cdot(b^{k+1}-a^{k+1})\cdot\frac{1}{1-k}\cdot(b^{1-k}-a^{1-k}),$$

$$(b-a)^2\leqslant\frac{1}{1-k^2}\cdot(b^{1+k}-a^{1+k})(b^{1-k}-a^{1-k}),$$

skąd wynika żądana nierówność.

Zadanie 8.

Wykaż, że dla dowolnej liczby nieujemnej t zachodzi nierówność:

$$e^t+e^{-t}\geqslant t^2+2.$$

Rozwiązanie

Połóżmy $f(x)=x^{\frac{k}{2}}$ i $g(x)=x^{-\frac{k}{2}}$ dla $x\in R$ oraz $\mathrm{a}=0$ i $b=\frac{t}{2}$. Mamy:

$$\left[\int_0^{\frac{t}{2}}(e^x\cdot e^{-x})dx\right]^2\leqslant\int_0^{\frac{t}{2}}e^{2x}dx\cdot\int_0^{\frac{t}{2}}e^{-2x}dx.$$

Stąd kolejno otrzymujemy:

$$\left(\int_0^{\frac{t}{2}}1dx\right)^2\leqslant\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{t}{2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\frac{t}{2}},$$

$$\left([x]_0^{\frac{t}{2}}\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^0\right),$$

$$\left(\frac{t}{2}-0\right)^2\leqslant\left(\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}\right),$$

$$
\begin{aligned}
\frac{t^2}{4} &\leqslant \frac{1}{4}(e^t-1)(-e^{-t}+1), \qquad \Big/ \cdot 4\\
t^2 &\leqslant (e^t-1)(-e^{-t}+1),\\
t^2 &\leqslant e^t\cdot(-e^t)+e^t+(-1)(-e^{-t})-1,\\
t^2 &\leqslant -e^0+e^t+e^{-t}-1,\\
t^2+2 &\leqslant e^t+e^{-t}.
\end{aligned}
$$

Uwaga

Podana nierówność jest również prawdziwa dla ujemnych t (wystarczy w miejsce $t>0$ podstawić $(-t)<0$, otrzymując taką samą nierówność (dlaczego?).

Zadanie 9.

Oblicz przybliżoną wartość całki $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$, stosując wzory (2), (3), (4), zawarte w opracowaniu *Uogólnienie wzoru Simpsona*.

Rozwiązanie

Podana całka wyraża sie przez funkcje elementarne:

$$
\int\limits_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx=\left[\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^1=\left(\frac{1}{6}\ln\frac{4}{1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\left(\frac{1}{6}\ln\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\right)=
$$

$$
=\left(\frac{\ln 4}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{0}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{\ln 4}{6}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=\frac{2\ln 2}{6}+\frac{2\pi\sqrt{3}}{18}=
$$

$$
=\frac{\ln 2}{3}+\frac{\pi\sqrt{3}}{9}\approx 0,231033+0,6045998=0,8356331
$$

Pozrównaj z otrzymanymi przez Ciebie obliczeniami przybliżonymi według wzorów: (2), (3), (4).

Ad. (1) $0{,}8383926$.

Ad. (2) $0{,}8425925$.

Ad. (3) $0{,}8353916$.