szkic rozwiązania – Jacek Kredenc

Sześcian T^2

Wyznacz wszystkie możliwie dodatnie liczby całkowite T takie, iż T^2 równa się sześcianowi sumy cyfr liczby T.

Rozwiązanie

T = 1, 27 są to jedyne możliwe wartości spełniające wymagania problemu.

Wyjaśnienie:

Niech S(n) oznacza sumę cyfr liczby n, wtedy na podstawie problemu mamy:

$T^2 = S(T)^3$ ……(i)

Następnie, musi istnieć jakaś nieujemna liczba całkowita p, taka iż:

$10^p <= T < 10^{(p+1)}$, czyli:

$10^{(2p)} <= T^2 = S(T)^3 < = (9p)^3$ .....(*)

$100*(p/(p+1))^3 >= 100*(2/3)^3 = 29.629......$, dla p >=2, oraz

$(p/(p+1))^3$ wzrasta dla dodatnich liczb całkowitych p. Zatem, na drodze indukcji wynika, że

$10^{(2p)} > (9p)^3$, zawsze gdy p >=2, także relacja (*) jest spełniona tylko dla liczb całkowitych nieujemnych p < 2 , tak więc $T < 10^2 = 100$.

Ponieważ T<100, to S(T) <= (9+9) = 18.

Następnie, $T^2 = S(T)^3$, tak więc T musi być sześcianem, jak również kwadratem. Zatem, S(T) jest kwadratem. Jedyne możliwości z S(T) < = 18 są: S(T) = 1, 4, 9, 16, dając T = 1, 8, 27, 64, w relacji do (i)…..(#).

Dla T = 8, mamy S(T) = 8! = 4, co stanowi sprzeczność. Podobnie, dla T = 64, mamy S(T) = 10! = 16, co stanowi sprzeczność. Dla T = 1 oraz 27, odpowiednie wartości S(T) są 1 oraz 9, co jest zgodne z (#).

Zatem, T = 1, 27 stanowią jedyne możliwe wartości spełniające wymagania problemu.

T	T^2	sześcian sumy cyfr
9	81	729
99	9801	5832
999	998001	19683
9999	99980001	46656
99999	9999800001	91125

999999	999998000001	157464
9999999	99999980000001	250047
99999999	9999999800000001	373248
999999999	999999998000000001	531441