Opaszmy księżyc

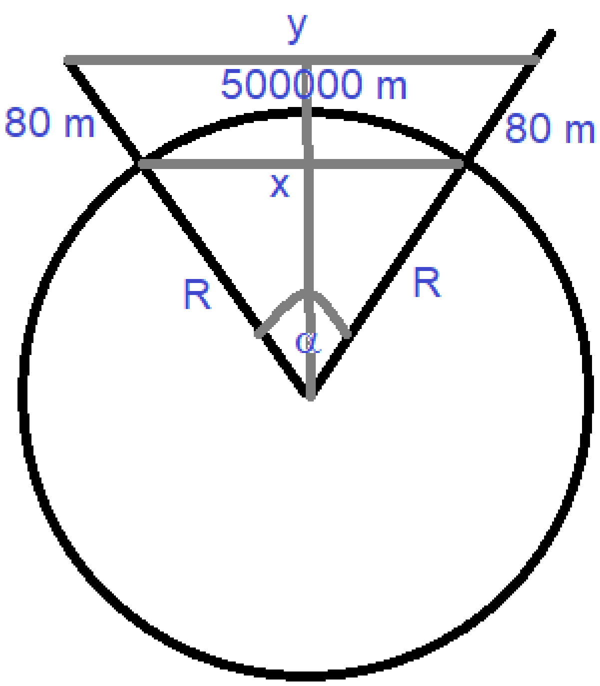
Zadanie 1.

Oblicz odległość iglic wież dla anten, na dwóch stacjach księżycowych, o wysokości 80 m. Ich podstawy oddalone są (na powierzchni Księżyca) o 500 km. Czy powierzchnia Księżyca będzie barierą dla rozchodzenia się fal radiowych?

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu tego zadania i następnych przyjmiemy, że Księżyc jest idealną kulą o promieniu R = 1738 km.

Zacznijmy od rysunku



Zacznijmy od wyznaczenia miary kąta α

$$\alpha = \frac{500000}{R} = \frac{500000}{1738000} \approx 0{,}287686996547$$

W mierze łukowej α ma w przybliżeniu 0,287687 co po zamianie na stopnie daje $16°29'$

Wyznaczmy teraz x

$\frac{1}{2}x = R\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1738000 \cdot \sin 8°15' =$498780,3540 m

Co oznacza, że 500 km po powierzchni Księżyca daje 498,7803540 km w linii prostej.

Obliczamy odległość iglic

$$\frac{y}{x} = \frac{R + 80}{R}$$

$$y = \frac{(R + 80) \cdot x}{R} = \frac{(1738000 + 80) \cdot 498780{,}3540}{1738000} = 498\,803{,}3128\ m$$

Tak więc iglice wież będą oddalone o 498,8033128 km

Oznacza to, że gdybyśmy przesunęli jedną z wież, tak by ich podstawy się pokrywały, to iglice będą oddalone od siebie o 22,9588 m.

Istnieje obawa, że powierzchnia Księżyca uniemożliwi łączność radiową między obiema antenami. Sprawdźmy to jeszcze.

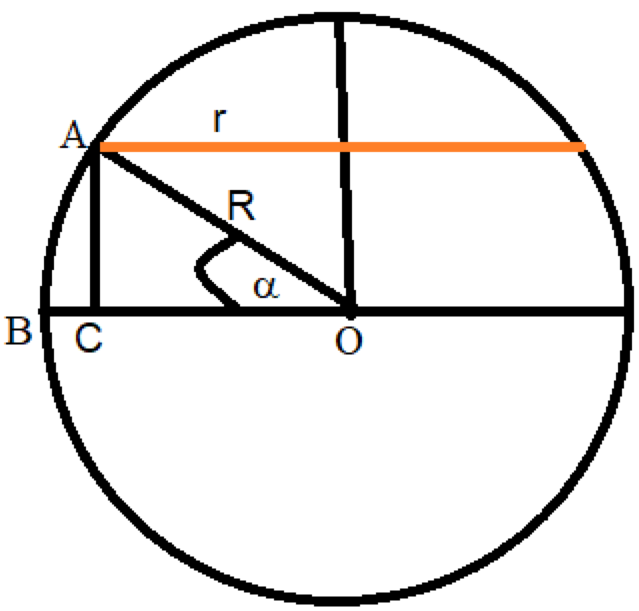
$$h = R \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = 1738000 \cdot \cos 8{,}25° = 17{,}985\ km$$

Niestety, krzywizna Księżyca spowoduje, że iglice wież nie będą się ”widziały”

Zadanie 2.

Chcemy opasać powierzchnię Księżyca wstążką kabli o 1 m krótszą od księżycowego równika. Ponieważ zakładamy, że wstążka jest nierozciągliwa, nie jest możliwe, by opasała ona jego powierzchnię wokół równika. W jakiej odległości od równika Księżyca powinna znajdować się wstążka.

Rozwiązanie:



Policzmy promień okręgu po którym opaszemy Księżyc.

$$O = 2\pi R$$

$$r = \frac{O-1}{2\pi} = \frac{2\pi R - 1}{2\pi} = 1\,737\,999{,}8408$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R} = \frac{1737999{,}8408}{1738000} = 0{,}99999990842638487232719460938794$$

$$\alpha = \cos^{-1} 0{,}99999990842638487232719460938794 = 0{,}000\,42801761902804461 53$$

Kąt α w mierze łukowej wynosi 0,024520 co daje $1'28"$

$$l = \alpha \cdot R = 743{,}8946\ m$$

Policzmy jeszcze inaczej

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2}$$

$$|BC| = R - r = 1738000 - 1737999{,}8408 = 0{,}1592$$

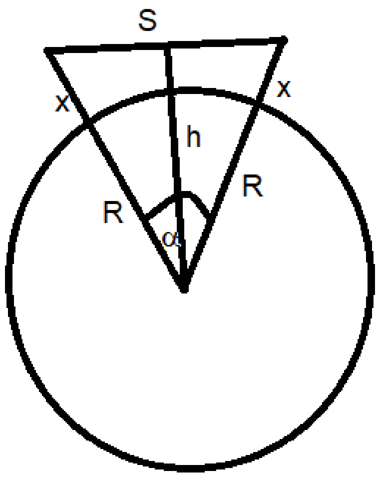
$$|AC|^2 = R^2 - r^2 = (R-r)(R+r) = 0{,}1592 \cdot 3475999{,}8408 = 553379{,}17465536$$

$$|AB| = \sqrt{0{,}02534464 + 553379{,}17465536} = \sqrt{553379{,}2} = 743{,}8946\text{ m}$$

Zadanie 3.

Wzdłuż równika wbijamy n wsporników oddalonych od siebie o y wystających na wysokość x. Następnie na tych wspornikach naciągamy taśmę, której długość jest o 1 m dłuższa od długości równika. W ten sposób taśma utworzy swoisty brzeg n-kąta foremnego. Oblicz możliwie najmniejszą liczbę wsporników.

Rozwiązanie



$$\frac{1}{2}S = (R + x)\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

Tak więc

$$\frac{1}{2}s = (R + x)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \qquad /\cdot 2n$$

$$ns = 2n(R + x)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$O + 1 = 2n(R + x)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$2\pi R + 1 = 2n(R + x)\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Stąd

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2\pi R + 1}{2n(R + x)} = \frac{\pi R + 1}{n(R + x)}$$

$$h = (R + x)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Jednak

$$R \leq h$$

$$R \leq (R + x)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq \frac{R}{R + x}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \leq \frac{\frac{\pi R + 1}{n(R + x)}}{\frac{R}{R + x}} = \frac{\pi R + 1}{nR}$$

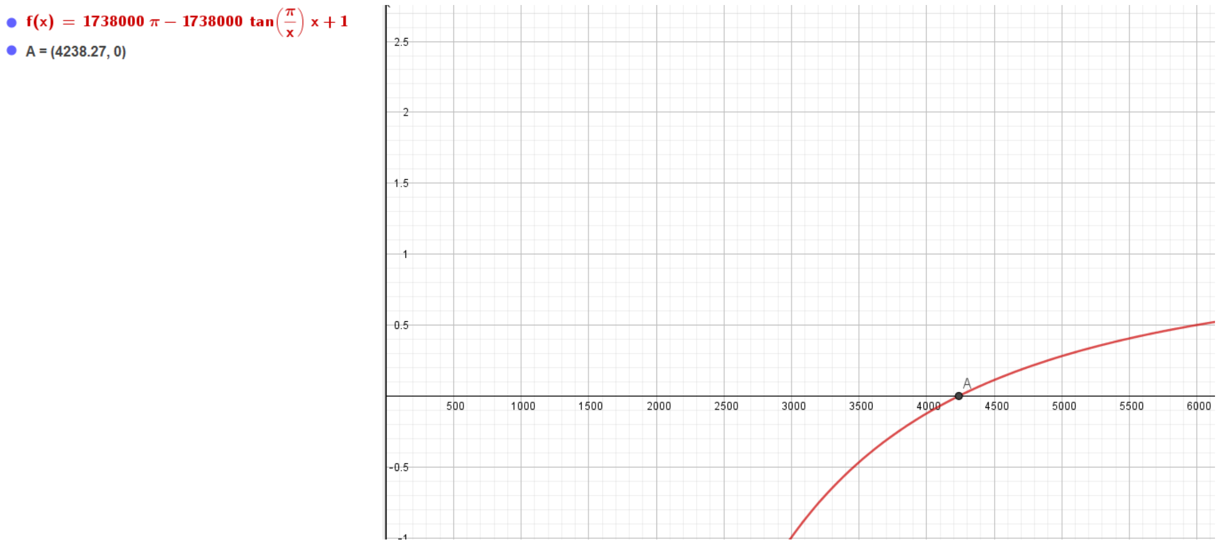
$$nR \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq \pi R + 1$$

$$\pi R - nR \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + 1 \geq 0$$

$$1738000\pi - 1738000\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot n + 1 \geq 0$$

Narysujmy wykres funkcji

$$f(x) = 1738000\pi - 1738000 \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \cdot x + 1$$



Tak więc $n \geq 4239$

Najmniejsza ilość wsporników to 4239