Siedem matematycznych rozmaitości

Zadanie1.

Dane są dwie liczby:

$$a=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

I

$$b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

Porównaj te liczby

Rozwiązanie

$$a=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu i otrzymujemy

$$a^2=1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}=1+a$$

Tak więc *a* jest pierwiastkiem równania kwadratowego

$$a^2-a-1=0$$

$$b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}=1+\frac{1}{b}$$

Mamy więc równanie

$$b=1+\frac{1}{b}$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy

$$b^2=b+1$$

$$b^2-b-1=0$$

Tak więc

$$a=b$$

Bo obie liczby są pierwiastkami tego samego równania kwadratowego.

Zadanie 2.

Wskaż dwucyfrową liczbę, o tej własności, że średnia arytmetyczna z jej cyfr jest $\frac{1}{10}$ tej liczby.

Rozwiązanie

Niech szukana liczba będzie postaci

$$\overline{ab}$$

Liczbę tę można zapisać

$$10a + b$$

$\frac{a+b}{2}$ - to średnia arytmetyczna cyfr tej liczby.

Z warunków zadania możemy zapisać równanie

$$10 \cdot \frac{a+b}{2} = 10a + b$$

$$5a + 5b = 10a + b$$

$$4b = 5a$$

$$\frac{b}{a} = \frac{5}{4}$$

Czyli

$$b = 5 \qquad i \qquad a = 4$$

Ponieważ

$$a; b\ naturalne\ i\ mniejsze\ od\ 10$$

Więc jest to jedyne rozwiązanie.

Szukaną liczbą jest 45.

Zadanie 3.

Liczba $\overline{abcd}$ jest kwadratem pewnej liczby. Liczby $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ też są kwadratami. Jaka to liczba, jeśli żadna z cyfr nie jest zerem.

Rozwiązanie

Niech

$$\overline{ab} = x^2$$

Wówczas

$$\overline{abcd} - 100x^2 = (20x + y)y$$

Ale

$$\overline{abcd} - 100x^2 = \overline{cd} < 100$$

Czyli

$$20xy < 100$$

$$xy < 5$$

Ponieważ kwadrat *x* jest dwucyfrowy więc

$$x \geq 4$$

Tak więc, warunek $xy < 5$ jest spełniony dla $x = 4 \quad i \quad y = 1$

Mamy więc

$$\overline{ab} = x^2 = 4^2 = 16$$

$$\overline{cd} = 20xy + y^2 = 20 \cdot 4 \cdot 1 + 1^2 = 80 + 1 = 81 = 9^2$$

Szukaną liczbą jest 1681, bo

$$16 = 4^2 \quad 81 = 9^2 \quad 1681 = 41$$

Zadanie 4.

Liczby *n; a; b; c* są liczbami naturalnymi. Znajdź rozwiązanie następującego równania:

$$n! = a! + b! + c!$$

Odpowiedź:

$$n = 3; \quad a = b = c = 2$$

Zadanie 5

Siedmiu kolegów postanowiło założyć spółdzielnię do gry w totolotka. Umówili się, że wszystkie wygrane z zakładów, będą sumowane i sprawiedliwie dzielone na wszystkich. Jednego razu, na swych kuponach skreślili w taki sposób po sześć liczb, że na wszystkich siedmiu kuponach, żadna liczba się nie powtarzała. Wiadomo jednak, że:

- Bogdan skreślił 6 liczb, z których każda była wielokrotnością „trójki";
- największą liczbą skreśloną przez Dawida jest „dziesiątka";
- wszystkie liczby skreślone przez Franka, to liczby pierwsze, a ich suma wynosi 150;
- Andrzej skreślił sześć kolejnych liczb;
- podobnie postąpił Waldemar;
- sześć liczb skreślonych przez Piotra, to wielokrotności liczby 7;
- Czesław skreślił sześć kwadratów liczb;
- żaden z kolegów nie skreślił na swoim kuponie liczby jeden;

Wskaż sześć liczb, które zostały wówczas wylosowane, wiedząc, że żaden z graczy nie miał ani jednego trafienia i wśród wylosowanych liczb nie było „jedynki".

Rozwiązanie

Wskazówka dla tych, którzy nigdy nie grali w totolotka. Gra ta polega na wylosowaniu sześciu liczb z pośród 49.

Zacznijmy od wypisania liczb, które mogli skreślić poszczególni gracze:

Bogdan – $\{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{9}; \mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{18}; \mathbf{21}; \mathbf{24}; \mathbf{27}; \mathbf{30}; \mathbf{33}; \mathbf{36}; \mathbf{39}; \mathbf{42}; \mathbf{45}; \mathbf{48}\}$

Dawid – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{4}; \mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{7}; \mathbf{8}; \mathbf{9}; \mathbf{10}\}$

Franek – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{7}; \mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{29}; \mathbf{31}; \mathbf{37}; \mathbf{41}; \mathbf{43}; \mathbf{47}\}$

Andrzej – {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 25;

$26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48; 49\}$

Waldemar – {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24;

$\mathbf{25}; 26; 27; 28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48;$

$\mathbf{49}\}$

Piotr – $\{\mathbf{7}; \mathbf{14}; \mathbf{21}; \mathbf{28}; \mathbf{35}; \mathbf{42}; \mathbf{49}\}$

Czesław – $\{\mathbf{4}; \mathbf{9}; \mathbf{16}; \mathbf{25}; \mathbf{36}; \mathbf{49}\}$

Zauważmy, że wiemy już jakie liczby skreślił Czesław. Na pewno tych liczb nie skreślił inny z graczy. Wykreślmy je z list pozostałych

Bogdan – $\{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{18}; \mathbf{21}; \mathbf{24}; \mathbf{27}; \mathbf{30}; \mathbf{33}; \mathbf{39}; \mathbf{42}; \mathbf{45}; \mathbf{48}\}$

Dawid – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \ \mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{7}; \mathbf{8}; \mathbf{10}\}$

Franek – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{7}; \mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{29}; \mathbf{31}; \mathbf{37}; \mathbf{41}; \mathbf{43}; \mathbf{47}\}$

Andrzej – {1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 26; 27; 28;

$29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Waldemar – {1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 23; 24; 26; 27;

$28; 29; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 37; 38; 39; 40; 41; 42; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Piotr – $\{\mathbf{7}; \mathbf{14}; \mathbf{21}; \mathbf{28}; \mathbf{35}; \mathbf{42}\}$

Wiemy już jakie liczby skreślił Piotr. Liczby te możemy wykreślić z list pozostałych graczy

Bogdan – $\{\mathbf{3}; \mathbf{6}; \mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{18}; \mathbf{24}; \mathbf{27}; \mathbf{30}; \mathbf{33}; \mathbf{39}; \mathbf{45}; \mathbf{48}\}$

Dawid – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{6}; \mathbf{8}; \mathbf{10}\}$

Franek – $\{\mathbf{2}; \mathbf{3}; \mathbf{5}; \mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{29}; \mathbf{31}; \mathbf{37}; \mathbf{41}; \mathbf{43}; \mathbf{47}\}$

Andrzej – {1; 2; 3; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 13; 15; 17; 18; 19; 20; 22; 23; 24; 26; 27; 29; 30; 31; 32;

$33; 34; 37; 38; 39; 40; 41; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Waldemar – {1; 2; 3; 5; 6; 8; 10; 11; 12; 13; 15; 17; 18; 19; 20; 22; 23; 24; 26; 27; 29; 30; 31;

$32; 33; 34; 37; 38; 39; 40; 41; 43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Znamy liczby skreślone przez Dawida

Bogdan – $\{\mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{18}; \mathbf{24}; \mathbf{27}; \mathbf{30}; \mathbf{33}; \mathbf{39}; \mathbf{45}; \mathbf{48}\}$

Franek – $\{\mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{29}; \mathbf{31}; \mathbf{37}; \mathbf{41}; \mathbf{43}; \mathbf{47}\}$

Andrzej – {29; 30; 31; 32; 33; 34}

Waldemar – {$43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Załóżmy, że Andrzej skreślił liczby **{29; 30; 31; 32; 33; 34},** a Waldemar skreślił liczby **{**$43; 44; 45; 46; 47; 48\}$

Bogdan – $\{\mathbf{12}; \mathbf{15}; \mathbf{18}; \mathbf{24}; \mathbf{27}; \mathbf{39}; \}$

Franek – $\{\mathbf{11}; \mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{37}; \mathbf{41}\}$

Trzeba jeszcze wyeliminować jedną z liczb przypisanych Frankowi. Wiemy, że suma wylosowanych przez niego liczb wynosi 150.

Ponieważ $11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 37 + 41 = 161$. O 11 za dużo, więc z listy jego skreśleń trzeba 11, czyli Franek skreślił $\{\mathbf{13}; \mathbf{17}; \mathbf{19}; \mathbf{23}; \mathbf{37}; \mathbf{41}\}$

Sprawdźmy jakie liczby nie zostały przez nikogo skreślone

{11; 20; 22; 26; 38; 40;}

Wylosowano liczby {11; 20; 22; 26; 38; 40;}

Zadanie 6.

Dane są trzy liczby:

$$a = \frac{111110}{111111}; \qquad b = \frac{222221}{222223}; \qquad c = \frac{333331}{333334}$$

Uporządkuj rosnąco te liczby i uzasadnij rozwiązanie.

Rozwiązanie

Zapiszmy liczby inaczej

$$a = \frac{111110}{111111} = \frac{111111-1}{111111} = 1 - \frac{1}{111111} = 1 - \frac{6}{666666}$$

$$b = \frac{222221}{222223} = \frac{222223-2}{222223} = 1 - \frac{2}{222223} = 1 - \frac{6}{666669}$$

$$c = \frac{333331}{333334} = \frac{333334-3}{333334} = 1 - \frac{3}{333334} = 1 - \frac{6}{666668}$$

Z nierówności

$$\frac{6}{666666} > \frac{6}{666668} > \frac{6}{666669}$$

Wynika nierówność

$$-\frac{6}{666666} < -\frac{6}{666668} < -\frac{6}{666669}$$

A z niej wynika nierówność

$$1 - \frac{6}{666666} < 1 - \frac{6}{666668} < 1 - \frac{6}{666669}$$

Czyli

$$a < c < b$$

Zadanie 7.

Z cyfr 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 i 9 utwórz dziewięciocyfrową liczbę o różnych liczbach tak, by:

- liczba utworzona z pierwszych trzech cyfr była $^1/_3$ liczby utworzonej z trzech ostatnich cyfr;

- liczba utworzona z trzech środkowych cyfr była równa różnicy liczby utworzonej z trzech pierwszych cyfr i trzech ostatnich cyfr.

Odpowiedź

Zadanie ma cztery rozwiązania. Są nimi liczby: 192384576; 219438657; 273546819; 327654981.