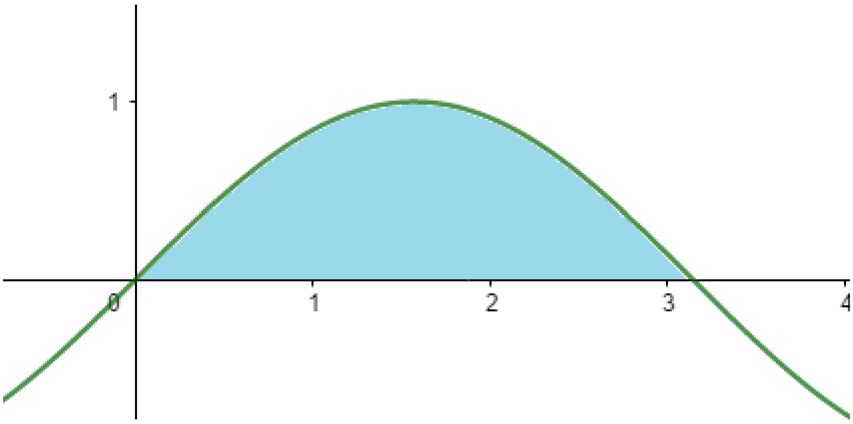
Pole wielkości

Zadanie 1.

Oblicz pole figury ograniczonej wykresem funkcji $f(x) = \sin x \quad dla \quad x\epsilon\langle 0:\pi\rangle$ i poziomą osią układu współrzędnych.

Rozwiązanie



Należy obliczyć pole zacieniowanego obszaru.

Na początek obliczmy pole połowy tego obszaru (na przedziale $\langle 0; \frac{\pi}{2}\rangle$.

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + 1 = 1$$

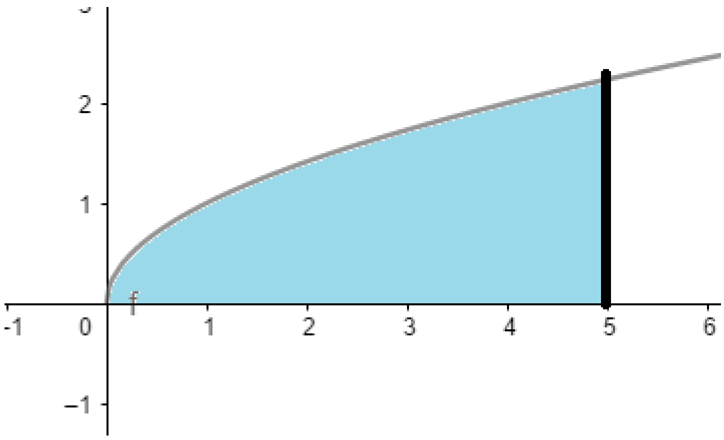
Pole całego obszaru:

$$P_C = 2P = 2$$

Zadanie 2.

Oblicz pole figury ograniczonej od góry wykresem funkcji $f(x) = \sqrt{x}$; od dołu: osia OX i od prawej strony prostą $x = 5$.

Rozwiązanie

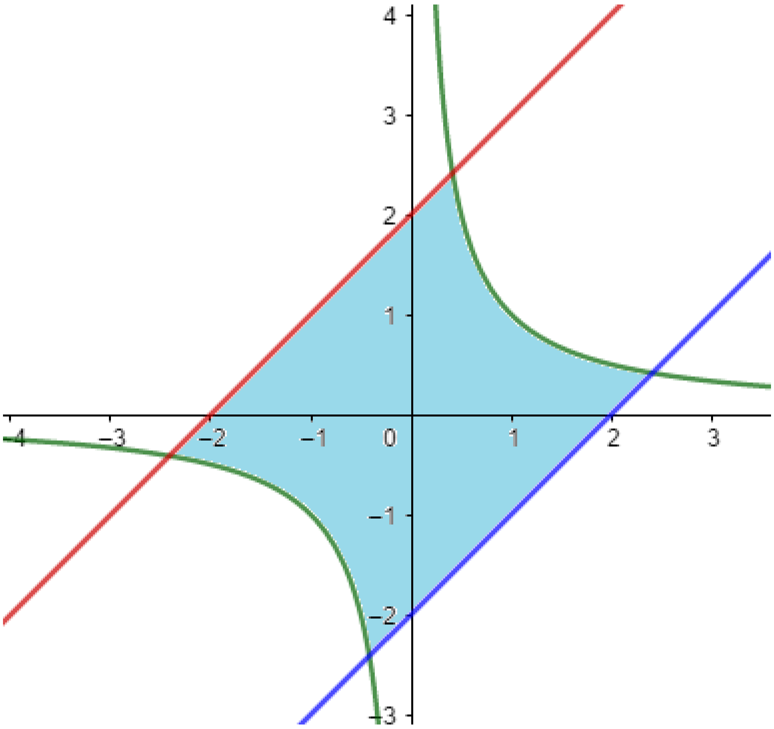


Jak poprzednio należy obliczyć pole zacieniowanego obszaru

$$P = \int_0^5 \sqrt{x}dx = \int_0^5 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^5 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^5 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^5 = \frac{2}{3}\cdot 5\cdot\sqrt{5} = \frac{10}{3}\sqrt{5} \approx 7{,}45$$

Zadanie 3.

Oblicz pole zacieniowanej figury jak na rysunku obok.



Rozwiązanie

Należy obliczyć pole zacieniowanej figury.

Podobnie, jak w pierwszym zadaniu podzielimy je na dwa przystające obszary. Niech linią podziału będzie oś OY.

Policzmy pole obszaru znajdującego się na prawo od osi OY.

Obszar ten można podzielić na trzy obszary

Obszar pierwszy to trójkąt znajdujący się w czwartej ćwiartce układu współrzędnych.

Pole tego trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$$

Zanim wskażemy pozostałe dwa obszary, wyznaczymy punkty przecięcia się wykresów funkcji:

$$x + 2 = \frac{1}{x}$$

Oczywiście $x \neq 0$

Pomnóżmy obustronnie przez x

$$x^2 + 2x = 1$$

Rozwiążmy otrzymane równanie kwadratowe:

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \qquad x_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1$$

Zatem

$$y_1 = -1 - \sqrt{2} + 2 = 1 - \sqrt{2} \qquad y_2 = \sqrt{2} - 1 + 2 = \sqrt{2} + 1$$

Zatem mamy dwa punkty

$$A = \left(\sqrt{2} - 1;\ \sqrt{2} + 1\right) \qquad D = \left(-1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\right)$$

$$x - 2 = \frac{1}{x} \qquad /\cdot x$$

$$x^2 - 2x = 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$$

$$x_3 = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} \qquad x_4 = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

Zatem

$$y_3 = 1 - \sqrt{2} - 2 = -1 - \sqrt{2} \qquad y_4 = 1 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - 1$$

Zatem mamy dwa dalsze punkty

$$B = \left(\sqrt{2} + 1;\ \sqrt{2} - 1\right) \qquad C = \left(1 - \sqrt{2};\ -1 - \sqrt{2}\right)$$

Drugim obszarem jest trapez odpowiadający przedziałowi $\langle 0;\ \sqrt{2} - 1\rangle$ o polu

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(3\sqrt{2} - 3 + 2 - \sqrt{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right) = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$

Trzeci obszar, to obszar odpowiadający przedziałowi $\langle\sqrt{2}-1;\ \sqrt{2}+1\rangle$. Obszar ten z góry ograniczony jest hiperbolą $f(x)=\frac{1}{x}$ i jest pomniejszony o trójkąt.

Obliczmy pole tego obszaru wraz z trójkątem

$$P=\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}\frac{dx}{x}=\ln x\,\Big|_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1}=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)=\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^2\right)$$

$$=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)$$

I jeszcze pole trójkąta

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}+1-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(2-2\sqrt{2}+1\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$$

$$P_C=2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{3}{2}+\sqrt{2}$$

Pole całego obszaru jest sumą trzech obliczonych części

$$P=2+\sqrt{2}-\frac{1}{2}+2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)-\frac{3}{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}+2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)=2\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)$$

I wreszcie pole całego zacieniowanego obszaru

$$P=4\left(\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right)\approx 9{,}18$$