Sięgamy po ciągi

Zadanie 1

Znajdź punkty skupienia (o ile istnieją) ciągów:

(a) $(a_n) = \{1,\ 2,\ 3,1,\ 2,\ 3,1,\ 2,\ 3,\ \dots\}$

(b) $b_n = sin\frac{n\pi}{2}$ dla nϵN^+

(c) $c_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$ dla nϵN^+

(d) $d_n = n^{(-1)^n}$ dla nϵN^+

(e) $e_n = \frac{3n+1}{6n+2}$ dla nϵN^+

(f) $f_n = n + (-1)^n$ dla nϵN^+

Rozwiązanie

(a) 1; 2; 3 (b) 1; 0; -1 (c) 1; -1 (d) 0 (e) $\frac{1}{2}$ (f) brak

Zadanie 2

Wykaż na podstawie definicji, że: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3.$

Rozwiązanie

Niech ε > 0 będzie dowolnie ustalone. Rozważmy nierówność

$$\frac{3n-1}{n+2} < \varepsilon,$$

którą przekształcamy równoważnie:

$\left|\frac{3n-1}{n+2} - \frac{3(n+2)}{n+2}\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{3n-1-3n-6}{n+2}\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{-7}{n+2}\right| < \varepsilon,\ \frac{7}{n+2} < \varepsilon,$

$\frac{n+2}{7} > \frac{1}{\varepsilon},\ n+2 > \frac{7}{\varepsilon},\ n > \frac{7}{\varepsilon} - 2 = k$

Zadanie 3

Oblicz $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{8n^2+4n+3}$.

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{8n^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cdot\left(2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot\left(8-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{8-\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{2-0+0}{8-0+0}=\frac{1}{4}.$$

Zadanie 4

Wykaż, że: (a) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$, (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos n}{n}=0$

Rozwiązanie

(a) Mamy $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$ (dlaczego?).

Skoro $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$, to na mocy twierdzenia o trzech ciągach $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$.

(b) Rozwiązanie identyczne jak powyżej.

Zadanie 5

Niech $a_n=\sqrt{3\sqrt{3\ldots\sqrt{3}}}$ dla n ϵ N^+. Wykaż, że ciąg (a_n) jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie

Mamy $a_n=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\sqrt{3}}\cdot\ldots\cdot\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot\ldots\cdot 3^{\frac{1}{2^n}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=3^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ dla n ϵ N^+.

Stąd $\lim_{n\to\infty}a_n=3^{1-0}=3$.

Zadanie 6

Dane są liczby dodatnie x_1 i a. Ciąg (x_n) jest określony warunkiem:

$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$dla n ϵ N⁺.

Wykaż, że ciąg (x_n) jest zbieżny i oblicz jego granicę.

Rozwiązanie

Wszystkie wyrazy ciągu (x_n) są dodatnie, co wynika bezpośrednio z przyjętego określenia ciągu (x_n). Na podstawie nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną mamy

$\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \geq \sqrt{\frac{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}{2}} = \sqrt{a}$, czyli $x_{n+1} \geq \sqrt{a}$ dla n ϵ N⁺.

Mamy również

$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} - x_n = \frac{\frac{a}{x_n} - x_n}{2} = \frac{a - (x_n)^2}{2x_n} \leq 0$ dla n ≥ 2 na podstawie nierówności powyżej. Zatem $x_{n+1} \leq x_n$ dla n ≥ 2. Ciąg (x_n) jest więc nierosnący oraz ograniczony z dołu przez liczbę $\sqrt{a}$ (począwszy od drugiego wyrazu). Zatem ciąg (x_n) jest zbieżny. Oznaczmy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Mamy z definicji ciągu (x_n) mamy

$2x_{n+1}x_n = (x_n)^2 + a$ dla n ϵ N⁺.

Przechodząc do granicy $n \to \infty$, otrzymujemy równanie:

$2x \cdot x = x^2 + a$ czyli $x^2 = a$, skąd $x = \sqrt{a}$ (bo x>0).