EGZAMIN ÓSMOKLASISTY (3) - ODPOWIEDZI

Zadania dla „Świata Matematyki" przygotował Witold Bednarek
(maksymalna liczba punktów za wszystkie zadania wynosi 32)

ZADANIA ZAMKNIĘTE

1. C, 2. C, 3. C, 4. D, 5. D, 6. C, 7. D, 8. D, 9. C, 10. C, 11. B, 12. A, 13. B, 14. B, 15. P i P, 16. F i P.

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 17. Liczba m jest postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Mamy:

$$m^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = (2k + 1)(2k + 1) - 1 = 4k^2 + 2k + 2k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$$

i ostatnia liczba jest podzielna przez 8, gdyż jedna z liczb k albo $k + 1$ jest parzysta.

Zadanie 18. Mnożymy obie strony nierówności przez 2, otrzymując nierówność: $2x + 13 < x + 23$, czyli: $2x - x < 23 - 13$, $x < 10$.

Odp. $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zadanie 19. Oznaczmy:

x – wiek Beaty,
$2x$ – wiek Andrzeja,
$x + 10$ – wiek Beaty za 10 lat,
$2x + 10$ – wiek Andrzeja za 10 lat.

Mamy równanie:

$$2x + 10 = 1{,}5(x + 10),$$

stąd

$$2x + 10 = 1{,}5x + 15$$
$$2x - 1{,}5x = 15 - 10$$
$$0{,}5x = 5$$
$$x = 10.$$

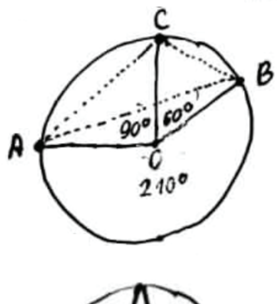
Zatem Beata ma 10 lat i Andrzej ma 20 lat.

Odp. Andrzej jest o 10 lat starszy od Beaty.

Zadanie 20. Mamy kolejno:

$$||x| - 2| = 1,$$
$$|x| - 2 = 1 \text{ lub } |x| - 2 = -1,$$
$$|x| = 3 \text{ lub } |x| = 1,$$
$$x = 3 \text{ lub } x = -3 \text{ lub } x = 1 \text{ lub } x = -1.$$

Zadanie 21. Ponieważ miary kątów środkowych są proporcjonalne do długości łuków, na których te kąty są oparte, to możemy zapisać, że rozważane kąty mają miary 2α, 3α, 7α. Oczywiście $2\alpha + 3\alpha + 7\alpha = 360^\circ$, czyli $12\alpha = 360^\circ$, skąd $\alpha = 30^\circ$. Zatem kąty środkowe mają miary $2\alpha = 60^\circ$, $3\alpha = 90^\circ$, $7\alpha = 210^\circ$ (patrz rysunek obok)



Wiadomo, że miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego opartego na tym samym łuku, co kąt środkowy (patrz rysunek obok)

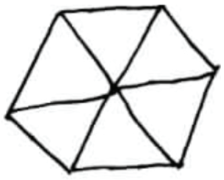
Zatem:

$\sphericalangle CAB = \frac{1}{2} \sphericalangle COB = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ,$

$\sphericalangle ABC = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \frac{1}{2} \cdot 90^\circ = 45^\circ,$

$\sphericalangle ACB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 210^\circ = 105^\circ.$

Zadanie 22. Oto podstawa danego ostrosłupa:



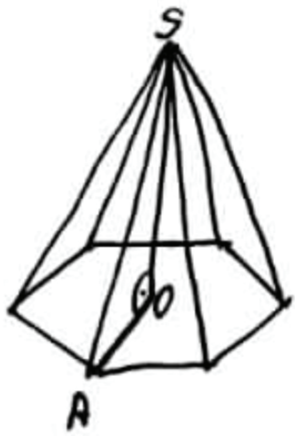
Mamy podział na sześć trójkątów równobocznych (dlaczego?).
Znany jest wzór na pole trójkąta równobocznego o boku a, a mianowicie:

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

W naszym przypadku $P = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (cm²), gdyż $a = 4$ cm.
Zatem pole podstawy wynosi:

$$P_P = 6P = 6 \cdot 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Wyznaczymy teraz wysokość H ostrosłupa:



Trójkąt AOS jest prostokątny, a zatem mamy równanie Pitagorasa:

$$|AO|^2 + |OS|^2 = |AS|^2.$$

Skoro $|AO| = a = 4$ cm i $|AS| = 5$ cm (założenia zadania), to:

$$4^2 + |OS|^2 = 5^2, \text{ czyli:}$$

$$16 + |OS|^2 = 25,$$

$$|OS|^2 = 9,$$

$$|OS| = 3 \text{ (cm)}.$$

W takim razie $H = |OS| = 3$ (cm).
Teraz zastosujemy wzór na objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot P_P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24\sqrt{3} \cdot 3 = 24\sqrt{3}.$$

Odp. Objętość ostrosłupa wynosi $24\sqrt{3}$ cm³.

Przygotował Witold Bednarek