Witold Bednarek – szkic rozwiązania

Do potęgi

Zadanie 1

Uzasadnij, że ciąg arytmetyczny:

(a) 21, 33, 45, 57, … zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych,

(b) 15, 22, 29, 36, … zawiera nieskończenie wiele sześcianów liczb naturalnych.

Rozwiązanie:

Wystarczy wskazać wyraz, który jest:

(a) kwadratem w ciągu 21, 33, 45, 57, 69, 81,… a mamy $81 = 9^2$,

(b) sześcianem w ciągu 15, 22, 29, 36, 43, 50, 57, 64,… a mamy $64 = 4^3$.

Zadanie 2

Dany jest ciąg arytmetyczny a, $a + r$, $a + 2r$, …, w którym:

(a) $a_1 = a = 2$ i $r = 5$,

(b) $a_1 = a = 3$ i $r = 7$,

(c) $a_1 = a = 5$ i $r = 3$.

Wyznacz potęgi (a) dwójki, (b) trójki, (c) piątki występujące w tym ciągu

Rozwiązanie:

Należy rozważyć podzielność $r | a^d - 1$.

(a) Mamy $5 | 2^d - 1$, skąd $d = 4$. Zatem potęgi $2^{4m + 1}$ występują w tym ciągu.

(b) Mamy $7 | 3^d - 1$, skąd $d = 6$. Zatem potęgi $3^{6m + 1}$ występują w tym ciągu.

(c) Mamy $3 | 5^d - 1$, skąd $d = 2$. Zatem potęgi $5^{2m + 1}$ występują w tym ciągu.

Zadanie 3

Zbadaj, dla jakich całkowitych m wartości trójmianów:

(a) $m^2 + m + 1$, (b) $m^2 + 2m + 4$, (c) $m^2 + 3m + 3$, (d) $m^2 + 4m + 6$

są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie:

(a) $m \in \{-1, 0\}$, (b) $m \in \{-2, 0\}$, (c) $m \in \{-2, -1\}$, (d) $m \in \emptyset$.

Zadanie 4

Liczby m i n są sumami kwadratów dwóch liczb całkowitych. Wykaż, że liczba mn ma też tę własność.

Rozwiązanie:

Niech $m = a^2 + b^2$ i $n = c^2 + d^2$, gdzie liczby a, b, c, d są całkowite. Mamy:

$mn = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + b^2 d^2 = (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2$

Zadanie 5

Niech $A_n = (4n^2 + 1)(4n^4 + 1)$, gdzie $n > 1$ jest liczbą naturalną. Przedstaw liczbę A_n w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych trzema sposobami.

Rozwiązanie:

$A_n=(4n^3 - 1)^2 + (2n^2 + 2n)^2$,

$A_n=(4n^3)^2 + (2n^2 + 1)^2$,

$A_n=(4n^3 + 1)^2 + (2n^2 - 2n)^2$.

Zadanie 6

Czy w zadaniu Diofantosa, przedstawionym w rozdziale „O pewnym zadaniu Diofantosa" artykułu „Świat potęgi" („Świat Matematyki nr 55), może być $a = b = c$?

Czy w tym zadaniu dwie spośród liczb a, b, c mogą być równe i większe od 1?

Rozwiązanie:

Nie. Istotnie, liczba: $a \cdot a + a = a^2 + a$ nie jest kwadratem liczby całkowitej dla żadnej liczby całkowitej dodatniej a, gdyż znajduje się między dwoma kolejnymi kwadratami liczb całkowitych dodatnich, a mianowicie

$$a^2 < a^2 + a < a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2.$$

Tak. Oto przykład: $(a, b, c) = (4, 4, 48)$. Mamy bowiem:

$$4 \cdot 4 + 48 = 8^2$$
$$48 \cdot 4 + 4 = 14^2$$
$$4 \cdot 48 + 4 = 14^2$$