Trójkątne zadanie

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami trójkąta, to:

a) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma \leqslant \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}$;

b) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}$;

c) $\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

d) $\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Rozwiązanie:

(a) Mamy

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{180^\circ-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqslant 2\cos\frac{\gamma}{2}$$

Zatem

$$\sin\alpha+\sin\beta \leqslant 2\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Analogicznie $\sin\beta+\sin\gamma \leqslant 2\cos\frac{\alpha}{2}$

$\sin\gamma+\sin\alpha \leqslant 2\cos\frac{\beta}{2}$

Wystarczy dodać stronami trzy ostatnie nierówności i podzielić przez 2.

(b) Mamy

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right) \leqslant \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-0\right) = \frac{1}{8}.$$

(c) Funkcja $f(x)=\cos x$ jest wypukła w górę w przedziale $[0, 90^\circ]$.

Zatem mamy nierówność Jensena

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}{3} \leqslant \cos\frac{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}}{3} = \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \cos\frac{180^\circ}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wystarczy obie strony pomnożyć przez 3.

(d) Skorzystamy z nierówności między średnią arytmetyczną a geometryczną:

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Stąd i z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \text{ czyli}$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Wystarczy teraz podnieść obie strony do sześcianu.