Zadanie na wartościach

Zadanie 1. Wyznacz z dokładnością do dwóch cyfr po przecinku sumę:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{59041}+\sqrt{59044}}+\frac{1}{\sqrt{59044}+\sqrt{59047}}+\frac{1}{\sqrt{59047}+\sqrt{59050}}$$

Rozwiązanie:

Zacznijmy od przedstawienia inaczej poniższego ułamka

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+3}}\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}{n-n-3}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+3}}{-3}=\frac{\sqrt{n+3}}{3}-\frac{\sqrt{n}}{3}$$

W takim razie

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{59041}+\sqrt{59044}}+\frac{1}{\sqrt{59044}+\sqrt{59047}}+\frac{1}{\sqrt{59047}+\sqrt{59050}}=$$

$$\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{3}-\frac{\sqrt{7}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt{59044}}{3}-\frac{\sqrt{59041}}{3}+\frac{\sqrt{59047}}{3}-\frac{\sqrt{59044}}{3}+\frac{\sqrt{59050}}{3}-\frac{\sqrt{59047}}{3}=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{59050}}{3}=\frac{\sqrt{59050}-1}{3}$$

Zauważmy teraz, że

$$\sqrt{59049{,}972004}=243{,}002<\sqrt{59050}<243{,}003=\sqrt{59050{,}458009}$$

Nas jednak interesuje nierówność:

$$243{,}002<\sqrt{59050}<243{,}003$$

Pomniejszmy wszystkie strony nierówności o 1

$$242{,}002<\sqrt{59050}-1<242{,}003$$

I podzielmy przez 3

$$80{,}667333\ldots<\frac{\sqrt{59050}-1}{3}<80{,}667666\ldots$$

Z dokładnością do trzech cyfr po przecinku suma wyjściowego szeregu wynosi 80,667

Zadanie 2. Wyznacz z dokładnością do 0,5 sumę:

$$\frac{1}{10+\sqrt{101}}+\frac{3}{\sqrt{101}+\sqrt{104}}+\frac{5}{\sqrt{104}+\sqrt{109}}+\cdots+\frac{199}{\sqrt{9901}+\sqrt{10100}}+\frac{201}{\sqrt{10100}+\sqrt{10301}}+\frac{203}{\sqrt{10301}+\sqrt{10504}}$$

Rozwiązanie:

$$\frac{1}{10+\sqrt{101}}+\frac{3}{\sqrt{101}+\sqrt{104}}+\frac{5}{\sqrt{104}+\sqrt{109}}+\cdots+\frac{199}{\sqrt{9901}+\sqrt{10100}}+\frac{201}{\sqrt{10100}+\sqrt{10301}}+\frac{203}{\sqrt{10301}+\sqrt{10504}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{100+0^2}+\sqrt{100+1^2}}+\frac{3}{\sqrt{100+1^2}+\sqrt{100+2^2}}+\frac{5}{\sqrt{100+2^2}+\sqrt{100+3^2}}+\cdots+\frac{199}{\sqrt{100+99^2}+\sqrt{100+100^2}}+\frac{201}{\sqrt{100+100^2}+\sqrt{100+101^2}}+\frac{203}{\sqrt{100+101^2}+\sqrt{100+102^2}}$$

Skorzystamy z następujących wzoru

$$\frac{n}{\sqrt{q}+\sqrt{p}}=\frac{n\left(\sqrt{q}-\sqrt{p}\right)}{q-p}$$

I mamy

$$\frac{1}{\sqrt{100+0^2}+\sqrt{100+1^2}}+\frac{3}{\sqrt{100+1^2}+\sqrt{100+2^2}}+\frac{5}{\sqrt{100+2^2}+\sqrt{100+3^2}}+\cdots+$$

$$+\frac{199}{\sqrt{100+99^2}+\sqrt{100+100^2}}+\frac{201}{\sqrt{100+100^2}+\sqrt{100+101^2}}+$$

$$+\frac{203}{\sqrt{100+101^2}+\sqrt{100+102^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{100+1^2}-10}{100+1^2-100}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{100+2^2}-\sqrt{100+1^2}\right)}{100+2^2-(100+1^2)}+\frac{5\cdot\left(\sqrt{100+3^2}-\sqrt{100+2^2}\right)}{100+3^2-(100+2^2)}+\cdots$$

$$+\frac{199\cdot\left(\sqrt{100+100^2}-\sqrt{100+99^2}\right)}{100+100^2-(100+99^2)}+\frac{201\cdot\left(\sqrt{100+101^2}-\sqrt{100+100^2}\right)}{100+101^2-(100+100^2)}+$$

$$+\frac{203\cdot\left(\sqrt{100+102^2}-\sqrt{100+101^2}\right)}{100+102^2-(100+101^2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{100+1^2}-10}{1^2}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{100+2^2}-\sqrt{100+1^2}\right)}{2^2-1^2}+\frac{5\cdot\left(\sqrt{100+3^2}-\sqrt{100+2^2}\right)}{3^2-2^2}+\cdots$$

$$+\frac{199\cdot\left(\sqrt{100+100^2}-\sqrt{100+99^2}\right)}{100^2-99^2}+\frac{201\cdot\left(\sqrt{100+101^2}-\sqrt{100+100^2}\right)}{101^2-100^2}+$$

$$+\frac{203\cdot\left(\sqrt{100+102^2}-\sqrt{100+101^2}\right)}{102^2-101^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{100+1^2}-10}{1}+\frac{3\cdot\left(\sqrt{100+2^2}-\sqrt{100+1^2}\right)}{3}+\frac{5\cdot\left(\sqrt{100+3^2}-\sqrt{100+2^2}\right)}{5}+\cdots$$

$$+\frac{199\cdot\left(\sqrt{100+100^2}-\sqrt{100+99^2}\right)}{199}+\frac{201\cdot\left(\sqrt{100+101^2}-\sqrt{100+100^2}\right)}{201}+$$

$$+\frac{203\cdot\left(\sqrt{100+102^2}-\sqrt{100+101^2}\right)}{203}=$$

$$=\sqrt{100+1^2}-10+\sqrt{100+2^2}-\sqrt{100+1^2}+\sqrt{100+3^2}-\sqrt{100+2^2}+\cdots+$$

$$+\sqrt{100+100^2}-\sqrt{100+99^2}+\sqrt{100+101^2}-\sqrt{100+100^2}+\sqrt{100+102^2}$$
$$-\sqrt{100+101^2}=$$

$$=\sqrt{100+102^2}-10$$

Zauważmy teraz, że

$$\sqrt{102^2}=102<\sqrt{100+102^2}<\sqrt{102{,}5^2}=102{,}5$$

Wystarczy wykorzystać nierówność:

$$102<\sqrt{100+102^2}<102{,}5$$

Odejmijmy ze wszystkich stron 10 i otrzymujemy

$$92<\sqrt{100+102^2}<92{,}5$$

Szukana suma z dokładnością do 0,5 wynosi 92

Zadanie 3. Dane są dwie liczby a i b. Która z tych liczb jest większa:

a) $a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}$ i $b=22$

b) $a=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)$ i $b=0{,}00002$

c) $a=\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2304}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2401}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2500}\right)$ i $b=\frac{1}{2}$

Rozwiązanie:

a) Wprowadzamy dodatkową liczbę c

$$c=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}$$

Obliczmy teraz $a+c$

$$a+c=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}\right)=$$

$$=\sqrt{2}-1+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{5}+\cdots+\sqrt{2020}-\sqrt{2019}+\sqrt{2022}-\sqrt{2021}+\sqrt{2024}-$$

$$-\sqrt{2023}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{4}+\sqrt{7}-\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{2021}-\sqrt{2020}+\sqrt{2023}-\sqrt{2022}+$$

$$+\sqrt{2025}-\sqrt{2024}=\sqrt{2025}-1=45-1=44$$

Ponieważ jednak

$$a=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2019}+\sqrt{2020}}+\frac{1}{\sqrt{2021}+\sqrt{2022}}+\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2024}}>$$

$$>\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2020}+\sqrt{2021}}+\frac{1}{\sqrt{2022}+\sqrt{2023}}+\frac{1}{\sqrt{2024}+\sqrt{2025}}=$$

$$=c$$

Więc

$$a>c$$

Czyli

$$a>22$$

Oznacza to, że $a>b$

b) Wprowadźmy pomocniczą liczbę c

$$c=\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)$$

Wyliczmy teraz ac

$$ac = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2025}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2023}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2024}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2025}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2022}{2023}\cdot\frac{2023}{2024}\cdot\frac{2024}{2025} = \frac{1}{2025}$$

Oszacujmy teraz liczbę c

$$c = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2023}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2024}}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2025}}\right) >$$

$$> 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2023}}+\frac{1}{\sqrt{2024}}+\frac{1}{\sqrt{2025}} >$$

$$> \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2025}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2025}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}+\frac{1}{\sqrt{2025}}}_{2025\ składników\ sumy} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\cdots+\frac{1}{45}+\frac{1}{45}+\frac{1}{45}}_{2025\ składników\ sumy} = 2025\cdot\frac{1}{45} = 45$$

Czyli

$$c > 45$$

Ponieważ

$$ac = \frac{1}{2025} < 45a$$

Więc

$$a < \frac{1}{2025\cdot 45} = \frac{1}{91125} < 0{,}00000109$$

Czyli $a < b$

c)

$$a = \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2304}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2401}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{2500}\right) =$$

$$= \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^2}}\right)\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^2}}\right)\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4^2}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{48^2}}\right)\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{49^2}}\right)\cdot\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{50^2}}\right) =$$

$$= \frac{\mathbf{2^2-1}}{\mathbf{2^2}}\cdot\frac{\mathbf{3^2-1}}{\mathbf{3^2}}\cdot\frac{\mathbf{4^2-1}}{\mathbf{4^2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mathbf{48^2-1}}{\mathbf{48^2}}\cdot\frac{\mathbf{49^2-1}}{\mathbf{49^2}}\cdot\frac{\mathbf{50^2-1}}{\mathbf{50^2}} =$$

$$= \mathbf{\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{47\cdot 49}{48\cdot 48}\cdot\frac{48\cdot 50}{49\cdot 49}\cdot\frac{49\cdot 51}{50\cdot 50}=\frac{1}{2}\cdot\frac{51}{50}=0,51}$$

Czyli $\boldsymbol{a} > b$