Trudna nierówność

W rozwiązaniu może być pomocna informacja ***O pewnych nierównościach*** z *Nie tylko dla orłów* (6) (SM54).

Zad. 1.

Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to: $\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$.

Zad. 2.

Wykaż, że jeżeli m należy do N^+ i $a, b, c > 0$, to: $\frac{a^{m+1}}{(b+c)^m}+\frac{b^{m+1}}{(c+a)^m}+\frac{c^{m+1}}{(a+b)^m} \geqslant \frac{a+b+c}{2^m}$.

Rozwiązanie:

Zad. 1.

Na podstawie:

$$\frac{x^2}{y} \geqslant 2x - y$$

mamy nierówność:

$$\frac{a^2}{\frac{1}{2}(a+b)} \geqslant 2a - \frac{1}{2}(a+b), \text{ czyli } \frac{a^2}{a+b} \geqslant a - \frac{a+b}{4} = \frac{3a-b}{4}.$$

Analogicznie:

$$\frac{b^2}{b+c} \geqslant \frac{3b-c}{4} \quad \text{i} \quad \frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{3c-a}{4}$$

Stąd:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geqslant \frac{3a-b}{4}+\frac{3b-c}{4}+\frac{3c-a}{4} = \frac{a+b+c}{2}$$

Zad. 2.

Na mocy:

$$\frac{x^{m+1}}{y^m} \geqslant (m+1)x - my$$

mamy nierówność:

$$\frac{a^{m+1}}{\left(\frac{b+c}{2}\right)^m} \geqslant (m+1)a - m\frac{b+c}{2}$$

skąd

$$\frac{a^{m+1}}{(b+c)^m} \geqslant \frac{(m+1)a}{2^m} - \frac{m(b+c)}{2^{m+1}} = \frac{2(m+1)a - m(b+c)}{2^{m+1}}$$

Analogicznie

$$\frac{b^{m+1}}{(c+a)^m} \geqslant \frac{2(m+1)b - m(c+a)}{2^{m+1}}$$

oraz

$$\frac{c^{m+1}}{(a+b)^m} \geqslant \frac{2(m+1)c - m(a+b)}{2^{m+1}}$$

Z trzech ostatnich nierówności mamy:

$$\frac{a^{m+1}}{(b+c)^m} + \frac{b^{m+1}}{(c+a)^m} + \frac{c^{m+1}}{(a+b)^m} = \frac{\left(2(m+1)a - m(b+c)\right) + \left(2(m+1)b - m(c+a)\right) + \left(2(m+1)c - m(a+b)\right)}{2^{m+1}} =$$

$$= \frac{2a+2b+2c}{2^{m+1}} = \frac{a+b+c}{2^m}$$