Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Sumujemy sinusy

Wyprowadź tożsamość:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + ... + \sin nx = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Rozwiązanie:

$$c_k = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x$$

$$c_{k+1} - c_k = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x = -2\sin\frac{x}{2}\sin kx$$

$$\sum_{k=1}^{n}(c_{k+1} - c_k) = -2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

$$c_{n+1} - c_1 = -2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx$$

$$c_{n+1} - c_1 = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{1}{2}x$$

$$-2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{1}{2}x$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \frac{\cos\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$