Ciekawe układy

Zadanie 1.

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3z \\ z^3 + 2 = 3x \end{cases}$$

w liczbach dodatnich.

Rozwiązanie:

Dodajemy stronami wszystkie równania:

$$(x^3+2) + (y^3+2) + (z^3+2) = 3y + 3z + 3x,$$

czyli $$(x^3 - 3x + 2) + (y^3 - 3y + 2) + (z^3 - 3z + 2) = 0$$

Następnie zauważamy, że

$$(x+2)(x-1)^2 + (y+2)(y-1)^2 + (z+2)(z-1)^2 = 0.$$

Skoro liczby x, y, z są dodatnie, to musi być

$$x-1=0 \quad i \quad y-1=0 \quad i \quad z-1=0,$$

czyli $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Należy jeszcze dokonać sprawdzenia, co jest łatwe.

Zadanie 2.

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} x + y = \frac{1}{z} \\ y + z = \frac{1}{x} \\ z + x = \frac{1}{y} \end{cases}$

Rozwiązanie:

Założenie: $x, y, z \neq 0$.

Mnożymy podane równania odpowiednio przez z, x, y otrzymując układ

$$\begin{cases} xz + yz = 1 \\ xy + xz = 1 \\ zy + xy = 1 \end{cases}$$

Z tego układu równań łatwo wyznaczamy

(*) $\quad xy = \frac{1}{2} \quad i \quad xz = \frac{1}{2} \quad i \quad yz = \frac{1}{2}.$

Mnożymy stronami ostatnie równania otrzymując

$$(xy) \cdot (xz) \cdot (yz) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{czyli} \quad (xyz)^2 = \frac{1}{8}.$$

Stąd $xyz = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ lub $xyz = \frac{-1}{2\sqrt{2}}.$

1° $xyz = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Stąd i z (*) wyznaczamy $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2° $xyz = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Stąd i z (*) wyznaczamy $x = y = z = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Sprawdzenie pozostawiamy Czytelnikom.

Zadanie 3.

Wykaż, że jeżeli: $\begin{cases} |x+y| = |z| \\ |y+z| = |x| \\ |z+x| = |y| \end{cases}$ to $x + y + z = 0$.

Rozwiązanie:

Mamy $\begin{cases} |x+y|^2 = |z|^2 \\ |y+z|^2 = |x|^2 \\ |z+x|^2 = |y|^2 \end{cases}$, czyli $\begin{cases} (x+y)^2 = z^2 \\ (y+z)^2 = x^2 \\ (z+x)^2 = y^2. \end{cases}$

Dodajemy stronami podane równania:

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) + (z^2 + 2zx + z^2) = z^2 + x^2 + y^2,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = 0, \quad (x+y+z)^2 = 0, \quad x + y + z = 0.$$

Zadanie 4.

Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ w zależności od parametru a.

Rozwiązanie:

Dodajemy stronami podane równania:

$$(ax + y + z) + (x + ay + z) + (x + y + az) = 1 + 1 + 1,$$

$$(a+2)x + (a+2)y + (a+2)z = 3, \text{ czyli } (a+2)(x+y+z) = 3.$$

Jeśli $a + 2 = 0$, czyli $a = -2$, to mamy sprzeczność: $0 \cdot (x+y+z) = 3$; $0 = 3$.

Załóżmy dalej, że $a+2 \neq 0$, czyli $a \neq -2$. Wtedy

$$x + y + z = \frac{3}{a+2}, \quad \text{skąd} \quad y + z = \frac{3}{a+2} - x.$$

Po podstawieniu do pierwszego równania otrzymujemy

$$ax + \frac{3}{a+2} - x = 1.$$

Przekształcamy równoważnie:

$$(a-1)x = 1 - \frac{3}{a+2},$$

$$(a-1)x = \frac{a+2}{a+2} - \frac{3}{a+2},$$

$$(*) \qquad (a-1)x = \frac{a-1}{a+2}.$$

Jeśli $a - 1 = 0$, czyli $a = 1$, to mamy tożsamość $0 \cdot x = \frac{0}{a+2}$; $0 = 0$

Dla $a = 1$ podany układ przyjmuje postać

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

Jest to układ nieoznaczony sprowadzający się do jednego równania:

$$x + y + z = 1.$$

Zatem takich rozwiązań (x, y, z) jest nieskończenie wiele.

Dla $a \neq 1$ mamy po podzieleniu obu stron równania $(*)$ przez $a - 1 \neq 0$:

$$x = \frac{1}{a+2}.$$

Analogicznie można otrzymać:

$$y = \frac{1}{a+2} \quad \text{i} \quad z = \frac{1}{a+2}.$$

Wobec tego $(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right)$ dla $a \neq -2$ i $a \neq 1$.