EGZAMIN PO ÓSMEJ KLASIE
– ODPOWIEDZI i ROZWIĄZANIA (SM51)

Dla „Świata Matematyki" przygotował Witold Bednarek

ZADANIA ZAMKNIĘTE – ODPOWIEDZI

1. C; 2. D; 3. C; 4. A; 5. C; 6. C; 7. D; 8. C; 9. C; 10. B; 11. B; 12. A; 13. A; 14. B; 15. P i P; 16. F i F.

ZADANIA OTWARTE – ROZWIĄZANIA

Zadanie 17.

x – cena ołówka (w zł), $3x$ – cena długopisu (w zł). Mamy równanie: $5 \cdot (3x) + 4 \cdot x = 13{,}3$.
Stąd otrzymujemy $x = 0{,}7$ (zł). Cena długopisu wynosi więc $3 \cdot 0{,}7\,(\text{zł}) = 2$ zł i 10 gr.

Zadanie 18.

x – wiek syna (w latach), $60 - x$ to wiek ojca (w latach). $x + 15$ to wiek syna za 15 lat; $(60 - x) + 15 = 75 - x$ to wiek ojca za 15 lat. Mamy równanie: $75 - x = 2(x + 15)$.
Stąd otrzymujemy $x = 15$ (lat) – wiek syna oraz $60 - 15 = 45$ (lat) – wiek ojca.

Zadanie 19.

Mamy: $10^n + 10^{n+1} + 10^{n+2} = 10^n + 10 \cdot 10^n + 100 \cdot 10^n = 111 \cdot 10^n$.
Ponieważ liczba 10^n jest podzielna przez 5, więc rozważana suma jest podzielna przez $111 \cdot 5 = 555$.

Zadanie 20.

Oznaczmy $a = 7k$ i $b = 12k$. Skoro liczby a i b są całkowite, to liczby $7a = 49k$ i $4b = 48k$ są całkowite. Wynika stąd, że liczba $7a - 4b = 49k - 48k = k$ jest całkowita.

Zadanie 21.

Stosując dwukrotnie twierdzenie Pitagorasa dla odpowiednich trójkątów prostokątnych w sześcianie, otrzymujemy $d^2 = 3a^2$, gdzie d oznacza długość przekątnej sześcianu o krawędzi a. Zgodnie z założeniem $d = 3\sqrt{3}$ (cm), więc $(3\sqrt{3})^2 = 3a^2$, czyli $9 \cdot 3 = 3a^2$, skąd $a = 3$ (cm). Zatem objętość sześcianu wynosi $V = a^3 = 3^3 = 27$ (cm^3).

Zadanie 22.

Niech a, b, c oznaczają długości trzech wzajemnie prostopadłych ścian prostopadłościanu. Zgodnie z warunkami zadania mamy równości dla pól ścian: $ab = 2$ (cm^2), $bc = 8$ (cm^2) i $ca = 18$ (cm^2). Mnożymy stronami te równości: $(ab) \cdot (bc) \cdot (ca) = 2 \cdot 8 \cdot 18$, czyli $a^2b^2c^2 = 288$, a więc $(abc)^2 = 288$, skąd $abc = \sqrt{288}$ (cm^2).
Zauważmy jeszcze, że $\sqrt{288} = \sqrt{144 \cdot 2} = \sqrt{12^2 \cdot 2} = 12\sqrt{2}$. Odp: $V = 12\sqrt{2}$ cm^3.

Zadanie 23.

Pole podstawy wynosi $P = 4^2 = 16$ (cm^2).
$ST = H$ – wysokość ostrosłupa,
TB – połowa przekątnej podstawy.
Można obliczyć, że $|TB| = 2\sqrt{2}$. Stosujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta TBS:
$|TB|^2 + |ST|^2 = |BS|^2$, czyli
$(2\sqrt{2})^2 + H^2 = 4^2$, skąd
$4 \cdot 2 + H^2 = 16$, $H^2 = 8$, $H = \sqrt{8}$, $H = 2\sqrt{2}$.
Stosujemy wzór na objętość ostrosłupa:
$V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$ (cm^2).