Proste rozwiązania

Zadanie 1. Znajdź po pięć par liczb naturalnych spełniających równania:

a) $x^2 - 2y^2 = 1$ b) $x^2 - 3y^2 = 1$ c) $x^2 - 5y^2 = 1$

Rozwiązanie

a) Jednym z rozwiązań jest para $(x; y) = (3; 2)$

Drugie rozwiązanie znajdziemy podnosząc wyrażenie $(3 - 2\sqrt{2})$ do kwadratu

$$(3 - 2\sqrt{2})^2 = 9 - 12\sqrt{2} + 8 = 17 - 12\sqrt{2}$$

Następnym rozwiązaniem jest $(x; y) = (17; 12)$

$$(17 - 12\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 51 - 34\sqrt{2} - 36\sqrt{2} + 48 = 99 - 70\sqrt{2}$$

Trzecią parą jest $(x; y) = (99; 70)$

$$(99 - 70\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 297 - 198\sqrt{2} - 210\sqrt{2} + 280 = 577 - 408\sqrt{2}$$

Czwarta para to $(x; y) = (577; 408)$

$$(577 - 408\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2}) = 1731 - 1154\sqrt{2} - 1224\sqrt{2} + 1632 = 3363 - 2378\sqrt{2}$$

Piąta para to $(x; y) = (3363; 2378)$

b) Jednym z rozwiązań jest para $(x; y) = (2; 1)$

Drugie rozwiązanie znajdziemy podnosząc wyrażenie $(2 - \sqrt{3})$ do kwadratu

$$(2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

Następnym rozwiązaniem jest $(x; y) = (7; 4)$

$$(7 - 4\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 14 - 7\sqrt{3} - 8\sqrt{3} + 12 = 26 - 15\sqrt{3}$$

Trzecią parą jest $(x; y) = (26; 15)$

$$(26 - 15\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 52 - 26\sqrt{3} - 30\sqrt{3} + 45 = 97 - 56\sqrt{3}$$

Czwarta para to $(x; y) = (97; 56)$

$$(97 - 56\sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 194 - 97\sqrt{3} - 112\sqrt{3} + 168 = 362 - 209\sqrt{3}$$

Piąta para to $(x; y) = (362; 209)$

c) Jednym z rozwiązań jest para $(x; y) = (9; 4)$

Drugie rozwiązanie znajdziemy podnosząc wyrażenie $(9 - 4\sqrt{5})$ do kwadratu

$$(9 - 4\sqrt{5})^2 = 81 - 72\sqrt{5} + 80 = 161 - 72\sqrt{5}$$

Następnym rozwiązaniem jest $(x; y) = (161; 72)$

$$(161 - 72\sqrt{5}) \cdot (9 - 4\sqrt{5}) = 1449 - 644\sqrt{5} - 648\sqrt{5} + 1440 = 2889 - 1292\sqrt{5}$$

Trzecią parą jest $(x; y) = (2889; 1292)$

$$(2889 - 1292\sqrt{5}) \cdot (9 - 4\sqrt{5}) = 26001 - 11556\sqrt{5} - 11628\sqrt{5} + 25840$$
$$= 51841 - 23184\sqrt{5}$$

Czwarta para to $(x; y) = (51841; 23184)$

$$(51841 - 23184\sqrt{5}) \cdot (9 - 4\sqrt{5}) = 466569 - 207364\sqrt{5} - 208656\sqrt{5} + 463680$$
$$= 930249 - 416020\sqrt{5}$$

Piąta para to $(x; y) = (930249; 416020)$

Zadanie 2. Znajdź rozwiązanie w liczbach naturalnych następujących równań Pella:

a) $x^2 - 6y^2 = 1$ b) $x^2 - 7y^2 = 1$ c) $x^2 - 8y^2 = 1$; d) $x^2 + 61y^2 = 1$ e) $x^2 - 67y^2 = 1$

Rozwiązanie

a) $x^2 - 6y^2 = 1$

Jedną z trójek będących rozwiązaniem równania $x^2 - 6y^2 = k$ jest (3; 1; 3). Drugą trójkę zadamy algebraicznie $(m; 1;\ m^2 - 6)$. Wówczas

$$x_1 = 3m + 6; \quad y_1 = 3 + m; \quad k_1 = 3(m^2 - 6)$$

Mamy wówczas

$$\left(\frac{3m + 6}{3}\right)^2 - 6\left(\frac{3 + m}{3}\right)^2 = \frac{m^2 - 6}{3}$$

Dla m=3 $\frac{m^2-6}{3} = 1$

$$(x_1;\ y_1;\ k_1) = (5; 2; 1)$$

Równanie to spełnia para $(x; y) = (5; 2)$

b) $x^2 - 7y^2 = 1$

Jedną z trójek będących rozwiązaniem równania $x^2 - 7y^2 = k$ jest (3; 1; 2). Drugą trójkę zadamy algebraicznie $(m; 1;\ m^2 - 7)$. Wówczas

$$x_1 = 3m + 7; \quad y_1 = 3 + m; \quad k_1 = 2(m^2 - 7)$$

Mamy wówczas

$$\left(\frac{3m + 7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3 + m}{2}\right)^2 = \frac{m^2 - 7}{2}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-7}{2} = -3$

Dla m=3 $\frac{m^2-7}{2}$ =1

$$(x_1;\ y_1;\ k_1) = (8; 3; 1)$$

c) $x^2 - 8y^2 = 1$

Jedną z trójek będących rozwiązaniem równania $x^2 - 8y^2 = k$ jest (3; 1; 1). Czyli rozwiązaniem równania jest para $(x; y) = (3; 1)$

d) $x^2 + 61y^2 = 1$

Jedną z trójek będących rozwiązaniem równania $x^2 - 61y^2 = k$ jest (8; 1; 3). Drugą trójkę zadamy algebraicznie $(m; 1;\ m^2 - 61)$. Wówczas

$$x_1 = 8m + 61; \quad y_1 = 8 + m; \quad k_1 = 3(m^2 - 61)$$

Mamy wówczas

$$\left(\frac{8m + 61}{3}\right)^2 - 61\left(\frac{8 + m}{3}\right)^2 = \frac{m^2 - 61}{3}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-61}{3} = -20$

Dla m=2 $\frac{m^2-61}{3} = -19$

Dla m=4 $\frac{m^2-61}{3} = -15$

Dla m=5 $\frac{m^2-61}{3} = -12$

Dla m=7 $\frac{m^2-61}{3} = -4$

Dla m=8 $\frac{m^2-61}{3} = 1$

Dla m=10 $\frac{m^2-61}{3} = 13$

$$(x_1;\ y_1;\ k_1) = (39; 5; -4)$$

Szukamy następnej trójki

$$x_2 = 39m + 305;\ y_2 = 39 + 5m;\ k_2 = -4(m^2 - 61)$$

$$x_2 = \frac{39m + 305}{4};\ y_2 = \frac{39 + 5m}{4};\ k_2 = \frac{m^2 - 61}{4}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-61}{4} = -15$

Dla m=3 $\frac{m^2-61}{4} = -13$

Dla m=5 $\frac{m^2-61}{4} = -9$

Dla m=7 $\frac{m^2-61}{4} = -3$

Dla m=9 $\frac{m^2-61}{4} = 5$

$$x_2 = 164;\ y_2 = 21;\ k_2 = -5$$

Wyznaczamy następną trójkę

$$x_3 = 164m + 1281;\ y_3 = 164 + 21m;\ k_3 = -5(m^2 - 61)$$

$$x_3 = \frac{164m + 1281}{5};\ y_3 = \frac{164 + 21m}{5};\ k_3 = \frac{m^2 - 61}{5}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-61}{5} = -12$

Dla m=4 $\frac{m^2-61}{5} = -9$

Dla m=6 $\frac{m^2-61}{5} = -5$

Dla m=9 $\frac{m^2-61}{5} = 4$

$$x_3 = 453;\ y_3 = 58;\ k_3 = 5$$

Szukamy następnej trójki

$$x_4 = 453m + 3538; y_4 = 453 + 58m;\ k_4 = 5(m^2 - 61)$$

$$x_4 = \frac{453m + 3538}{5};\ y_4 = \frac{453 + 58m}{5};\ k_4 = \frac{m^2 - 61}{5}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-61}{5} = -12$

Dla m=4 $\frac{m^2-61}{5} = -9$

Dla m=6 $\frac{m^2-61}{5} = -5$

Dla m=9 $\frac{m^2-61}{5} = 4$

$$x_4 = 1523;\ y_4 = 195;\ k_4 = 4$$

Liczymy dalej

$$x_5 = 1523m + 11895;\ y_5 = 1523 + 195m;\ k_5 = 4(m^2 - 61)$$

$$x_5 = \frac{1523m + 11895}{4};\ y_5 = \frac{1523 + 195m}{4};\ k_5 = \frac{m^2 - 61}{4}$$

Dla m=1 $\frac{m^2-61}{4} = -15$

Dla m=3 $\frac{m^2-61}{4} = -13$

Dla m=5 $\frac{m^2-61}{4} = -9$

Dla m=7 $\frac{m^2-61}{4} = -3$

Dla m=9 $\frac{m^2-61}{4} = 5$

$$x_5 = 5639;\ y_5 = 722;\ k_5 = -3$$

Liczymy dalej

$$x_6 = 5639m + 44042;\ y_6 = 5639 + 722m;\ k_6 = -3(m^2 - 61)$$

$$x_6 = \frac{5639m + 44042}{3};\ y_6 = \frac{5639 + 722m}{3};\ k_6 = \frac{(m^2 - 61)}{-3}$$

Dla m=1 $\frac{(m^2-61)}{-3} = 20$

Dla m=2 $\frac{(m^2-61)}{-3} = 19$

Dla m=4 $\frac{(m^2-61)}{-3} = 15$

Dla m=5 $\frac{(m^2-61)}{-3} = 12$

Dla m=7 $\frac{(m^2-61)}{-3} = 4$

Dla m=8 $\frac{(m^2-61)}{-3} = -1$

Dla m=10 $\frac{(m^2-61)}{-3} = -13$

$$x_6 = 29718;\ y_6 = 3805;\ k_6 = -1$$

Zastosujmy teraz sztuczkę polegającą na tym, że otrzymaną trójkę pomnożymy przez siebie. Wówczas

$$x = 29718^2 + 61 \cdot 3805^2 = 1766319049$$

$$y = 2 \cdot 29718 \cdot 3805 = 226153980$$

$$k = 1$$

Czyli rozwiązaniem równania jest para $(x; y) = (1766319049;\ 226153980)$

e) $x^2 - 67y^2 = 1$

Niech trójką wyjściową będzie trójka $(x_0;\ y_0;\ k_0) = (9; 1; 14)$

Wówczas $(x_1;\ y_1;\ k_1) = \left(9m + 67; 9 + m; 14(m^2 - 67)\right)$, wiec

$$(x_1;\ y_1;\ k_1) = \left(\frac{9m + 67}{14}; \frac{9 + m}{14}; \frac{m^2 - 67}{14}\right)$$

Dla m=5 $\frac{m^2-67}{14} = -3$

Dla m=19 $\frac{m^2-67}{14} = 21$

W takim razie

$$(x_1;\ y_1;\ k_1) = (8; 1;\ -3)$$

Generujemy drugą trójkę

$$(x_2;\ y_2;\ k_2) = \left(8m + 67; 8 + m;\ -3(m^2 - 67)\right)$$

Czyli

$$(x_2;\ y_2;\ k_2) = \left(\frac{8m + 67}{3}; \frac{8 + m}{3}; \frac{m^2 - 67}{-3}\right)$$

Dla m=1 $\frac{m^2-67}{-3} = 22$

Dla m=4 $\frac{m^2-67}{-3} = 17$

Dla m=7 $\frac{m^2-67}{-3} = 6$

Dla m=10 $\frac{m^2-67}{-3} = -11$

$$(x_2;\ y_2;\ k_2) = (41; 5; 6)$$

Generujemy następną trójkę

$$(x_3;\ y_3;\ k_3) = \left(41m + 335; 41 + 5m; 6(m^2 - 67)\right)$$

Czyli

$$(x_3;\ y_3;\ k_3) = \left(\frac{41m + 335}{6}; \frac{41 + 5m}{6}; \frac{m^2 - 67}{6}\right)$$

Dla m=5 $\frac{m^2-67}{6} = -7$

Dla m=11 $\frac{m^2-67}{6} = 9$

$$(x_3;\ y_3;\ k_3) = (90; 11;\ -7)$$

Nadal generujemy

$$(x_4;\ y_4;\ k_4) = \left(90m + 737; 90 + 11m;\ -7(m^2 - 67)\right)$$

Czyli

$$(x_4;\ y_4;\ k_4) = \frac{90m + 737}{7}; \frac{90 + 11m}{7}; \frac{m^2 - 67}{-7}$$

Dla m=2 $\frac{m^2-67}{-7} = 9$

Dla m=9 $\frac{m^2-67}{-7} = -2$

Dla m=16 $\frac{m^2-67}{-7} = -27$

$$(x_4;\ y_4;\ k_4) = (221; 27;\ -2)$$

Generujemy dalej

$$(x_5;\ y_5;\ k_5) = \left(221m + 1809; 221 + 27m;\ -2(m^2 - 67)\right)$$

Czyli

$$(x_5;\ y_5;\ k_5) = \left(\frac{221m + 1809}{2}; \frac{221 + 27m}{2}; \frac{m^2 - 67}{-2}\right)$$

Dla m=1 $\frac{m^2-67}{-2}=33$

Dla m=3 $\frac{m^2-67}{-2}=29$

Dla m=5 $\frac{m^2-67}{-2}=21$

Dla m=7 $\frac{m^2-67}{-2}=9$

Dla m=9 $\frac{m^2-67}{-2}=-7$

Dla m=11 $\frac{m^2-67}{-2}=-27$

$$(x_5;\ y_5;\ k_5)=(1899;232;\ -7)$$

Generujemy dalej

$$(x_6;\ y_6;\ k_6)=\left(1899m+15544;1899+232m;-7(m^2-67)\right)$$

$$(x_6;\ y_6;\ k_6)=\left(\frac{1899m+15544}{7};\frac{1899+232m}{7};\frac{m^2-67}{-7}\right)$$

Dla m=5 $\frac{m^2-67}{-7}=6$

Dla m=12 $\frac{m^2-67}{-7}=-11$

$$(x_6;\ y_6;\ k_6)=(3577;437;6)$$

Generujemy następną trójkę

$$(x_7;\ y_7;\ k_7)=\left(3577m+29279;3577+437m;6(m^2-67)\right)$$

$$(x_7;\ y_7;\ k_7)=\left(\frac{3577m+29279}{6};\frac{3577+437m}{6};\frac{m^2-67}{6}\right)$$

Dla m=1 $\frac{m^2-67}{6}=-11$

Dla m=7 $\frac{m^2-67}{6}=-3$

Dla m=13 $\frac{m^2-67}{6}=17$

$$(x_7;\ y_7;\ k_7)=(9053;1106;\ -3)$$

Generujemy dalej

$$(x_8;\ y_8;\ k_8)=\left(9053m+74102;9053+1106m;\ -3(m^2-67)\right)$$

$$(x_8;\ y_8;\ k_8) = \left(\frac{9053m + 74102}{3};\ \frac{9053 + 1106m}{3};\ \frac{m^2 - 67}{-3}\right)$$

Dla m=2 $\frac{m^2-67}{-3} = 21$

Dla m=5 $\frac{m^2-67}{-3} = 14$

Dla m=8 $\frac{m^2-67}{-3} = 1$

$$(x_8;\ y_8;\ k_8) = (48842;\ 5967; 1)$$

Rozwiązaniem naszego równania jest para

$$(x; y) = (48842;\ 5967)$$