Podróże

Korzystając z doświadczeń starożytnego matematyka rozwiąż indyjskie zadania.

Zadanie 1. Korzystając ze wzoru Bhaskary I znajdź przybliżone wartości:

a) $\sin 15°$; b) $\sin 100°$; c) $\sin 163°$; d) $\sin\frac{\pi}{8}$; e) $\sin\frac{5\pi}{7}$.

Rozwiązanie

W przykładach: a), b), c) korzystamy ze wzoru: $\sin\alpha \approx \frac{4\alpha(180-\alpha)}{40500-\alpha(180-\alpha)}$, a przykładach d) i e) ze wzoru: $\sin x = \frac{16x(\pi-x)}{5\pi^2-4x(\pi-x)}$

a) $\sin 15° \approx 0{,}2604$
b) $\sin 100° \approx 0{,}7917$
c) $\sin 163° \approx 02938$
d) $\sin\frac{\pi}{8} \approx 0{,}3836$
e) $\sin\frac{5\pi}{7} \approx 07805$

Zadanie 2. Wzorując się na przykładzie z artykułu wyznacz współczynniki a, b, c i d w następującym wzorze:

$$\sin x = \frac{ax(\pi-x)+b}{cx(\pi-x)+d}$$

Rozwiązanie

1. Ponieważ: $\sin 0 = 0$, mamy

$$\boldsymbol{\frac{b}{d} = 0}$$

Skąd wynika, że

$$\boldsymbol{b = 0}$$

2. Ponieważ: $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, mamy

$$\frac{a\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{c\frac{\pi}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)+d} = \frac{a\frac{\pi^2}{4}}{c\frac{\pi^2}{4}+d} = 1$$

$$\boldsymbol{a\frac{\pi^2}{4} = c\frac{\pi^2}{4} + d}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{\pi^2}{4}(a - c)}$$

3. Ponieważ: $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, mamy

$$\frac{a\frac{\pi}{6}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{c\frac{\pi}{6}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + d} = \frac{a\frac{\pi}{6}\frac{5\pi}{6}}{c\frac{\pi}{6}\frac{5\pi}{6} + d} = \frac{a\frac{5\pi^2}{36}}{c\frac{5\pi^2}{36} + d} = \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{a\frac{5\pi^2}{18} = c\frac{5\pi^2}{36} + d}$$

$$\boldsymbol{d = \frac{5\pi^2}{36}(2a - c)}$$

$$\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}(a - c) = \frac{5\pi^2}{36}(2a - c)}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{4}(a - c) = \frac{5}{36}(2a - c)}$$

$$\boldsymbol{36(a - c) = 20(2a - c)}$$

$$\boldsymbol{9a - 9c = 10a - 5c}$$

$$\boldsymbol{a = -4c}$$

Niech c=1, wówczas a=-4.

$$\boldsymbol{d = \frac{\pi^2}{4}(a - c) = \frac{\pi^2}{4}(-4 - 1) = -\frac{5\pi^2}{4}}$$

Ostatecznie

$$\frac{ax(\pi - x) + b}{cx(\pi - x) + d} = \frac{-4x(\pi - x)}{x(\pi - x) - \frac{5\pi^2}{4}} = \frac{4x(\pi - x)}{\frac{5\pi^2}{4} - x(\pi - x)} = \frac{16x(\pi - x)}{5\pi^2 - 4x(\pi - x)}$$