Nie do rozwiązania (2)

Zadanie 1. Wykaż, że istnieje nieskończenie liczb pierwszych, których zapis dziesiętny kończy się na:

a) 111…11; b) 333…33; c) 777…77; d) 999…99.

Rozwiązanie

a) Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Przyjmijmy

$$\boldsymbol{a = \underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr} \quad i \quad r = 10^k}$$

Liczby te są względnie pierwsze. Na mocy twierdzenia Dirichleta ciąg arytmetyczny

$$\underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr};\ 1\underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr};\ 2\underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr};\ 3\underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr};\ \ldots$$

Zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych, a każda liczba w tym ciągu kończy się na $\underbrace{111 \ldots 11}_{k\,cyfr}$

b) Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Przyjmijmy

$$\boldsymbol{a = \underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr} \quad i \quad r = 10^k}$$

Liczby te są względnie pierwsze. Na mocy twierdzenia Dirichleta ciąg arytmetyczny

$$\underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr};\ 1\underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr};\ 2\underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr};\ 3\underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr};\ \ldots$$

Zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych, a każda liczba w tym ciągu kończy się na $\underbrace{333 \ldots 33}_{k\,cyfr}$

c) Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Przyjmijmy

$$\boldsymbol{a = \underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr} \quad i \quad r = 10^k}$$

Liczby te są względnie pierwsze. Na mocy twierdzenia Dirichleta ciąg arytmetyczny

$$\underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr};\ 1\underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr};\ 2\underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr};\ 3\underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr};\ \ldots$$

Zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych, a każda liczba w tym ciągu kończy się na $\underbrace{777 \ldots 77}_{k\,cyfr}$

d) Niech $k \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną. Przyjmijmy

$$\boldsymbol{a = \underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr} \quad i \quad r = 10^k}$$

Liczby te są względnie pierwsze. Na mocy twierdzenia Dirichleta ciąg arytmetyczny

$$\underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr};\ 1\underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr};\ 2\underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr};\ 3\underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr};\ \ldots$$

Zawiera nieskończenie wiele liczb pierwszych, a każda liczba w tym ciągu kończy się na $\underbrace{999 \ldots 99}_{k\,cyfr}$

Zadanie 2. Wykaż, że równanie: $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 14xyz$ nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z.

Rozwiązanie

Zakładamy, że podane równanie ma rozwiązanie $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ w liczbach całkowitych dodatnich z najmniejszym $x_0 > 0$. Następnie wnioskujemy z równania kolejno, że: $x_0 = 2x_1;\ y_0 = 2y_1;\ z_0 = 2z_1;\ (x_1;\ y_1;\ z_1 \in N^+)$. Mamy wówczas równanie

$$x_1^3 + 2y_1^3 + 4z_1^3 = 14x_1y_1z_1$$

Co przeczy minimalności x_0, bo $x_1 = \frac{1}{2}x_0 < x_0$

Zadanie 3. Wykaż, że istnieje nieskończenie wiele par a,b>0 liczb naturalnych, dla których:

$$a|b^2 + 1 \quad i \quad b|a^2 + 1$$

Rozwiązanie

Przyjmujemy $a = f_{2n-1} \quad i \quad b = f_{2n+1}$ i korzystamy z tożsamości:

$$f_{2n+3} \cdot f_{2n-1} - 1 = f_{2n+1}^2$$

Dwukrotnie

$$f_{2n+3} \cdot f_{2n-1} - 1 = f_{2n+1}^2 \quad i \quad f_{2n+1} \cdot f_{2n-3} - 1 = f_{2n-1}^2 \quad dla \quad n \geq 2$$

(W drugiej tożsamości kładziemy $n - 1$ zamiast *n*). Mamy więc

$$f_{2n+3} \cdot f_{2n-1} = f_{2n+1}^2 + 1 \quad i \quad f_{2n+1} \cdot f_{2n-3} = f_{2n-1}^2 + 1$$

Skąd

$$f_{2n-1}|f_{2n+1}^2 + 1 \quad i \quad f_{2n+1}|f_{2n-1}^2 + 1$$

Zatem wystarczy przyjąć $a = f_{2n-1} \quad i \quad b = f_{2n+1}$ dla nieskończenie wielu $n \in N^+$.