Szkice rozwiązań, Jacek Kredenc

Nie do rozwiązania

Zadanie 1. Niech $f(x) = \cos(x) + \cos(ax)$ dla $x \in R$. Wykaz, że jeśli funkcja f jest okresowa, to liczba a jest wymierna.

Rozwiązanie:

Niech T ($T \neq 0$) oznacza okres funkcji f. W szczególności

$f(T) = f(0)$, czyli

$$\cos T + \cos aT = \cos 0 + \cos a \cdot 0 = \cos 0 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

Stąd $\cos T = 1$ i $\cos aT = 1$ (dlaczego?). Zatem $T = 2k\pi$ i $aT = 2l\pi$, gdzie k, l są liczbami całkowitymi i $k \neq 0$. W konsekwencji $a = \frac{aT}{T} = \frac{2l\pi}{2k\pi} = \frac{l}{k}$ i jest to liczba wymierna.

Zadanie 2. Niech $a_1, a_2, \cdots, a_n$ $(n \geq 2)$ będą liczbami rzeczywistymi różnymi od zera. Określamy funkcję:

$f(x) = \{a_1 x\} + \{a_2 x\} + \cdots + \{a_n x\}$ dla $x \in R$.

Wykaż, że jeśli funkcja f jest okresowa, to liczby $a_1, a_2, \cdots, a_n$ są parami współmierne, czyli $\frac{a_i}{a_j}$ jest liczbą wymierną dla każdych $i, j = 1,2, \cdots, n$.

Rozwiązanie:

Niech $T (T \neq 0)$ oznacza okres funkcji f. W szczególności

$f(T) = f(0)$, czyli

$$\{a_1 T\} + \{a_2 T\} + \cdots + \{a_n T\} = \{a_1 \cdot 0\} + \{a_2 \cdot 0\} + \cdots + \{a_n \cdot 0\} = \{0\} + \{0\} + \cdots + \{0\}$$
$$= 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

Skoro $\{t\} \geq 0$ dla dowolnego $t \in R$, to musi być:

$\{a_1 T\} = 0$ i $\{a_2 T\} = 0$ i … i $\{a_n T\} = 0$

Zatem $a_i T = m_i$ dla $i = 1,2, \cdots, n$ gdzie m_i są liczbami całkowitymi różnymi od 0. W konsekwencji $\frac{a_i}{a_j} = \frac{a_i T}{a_j T} = \frac{m_i}{m_j}$ jest liczbą wymierną dla każdych $i, j = 1,2, \cdots, n$

Zadanie 3. Niech $a, b, c, h_a, h_b, h_c, S$ oznaczają odpowiednio: długości boków, wysokości i pole trójkąta. Wykaż, że:

$$(a^2+b^2+c^2)\cdot(h_a^2+h_b^2+h_c^2)\geq 36S^2$$

Rozwiązanie:

Na mocy nierówności Schwarza mamy

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{h_a^2+h_b^2+h_c^2}\geq ah_a+bh_b+ch_c=2S+2S+2S=6S$$

Wystarczy teraz podnieść obie strony nierówności (dodatnie) do kwadratu

Zadanie 4. Niech $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$ i $p>q>0$ $(p,q\in N)$. Wykaż, że zachodzi nierówność między średnimi potęgowymi:

$$\sqrt[p]{\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}}\geq\sqrt[q]{\frac{a_1^q+a_2^q+\cdots+a_n^q}{n}}$$

Rozwiązanie:

Rozważmy funkcję $f(x)=x^{\frac{p}{q}}$ dla $x\in(0,\infty)$. Ponieważ $\frac{p}{q}>1$, to f jest funkcją wypukłą w dół. Stosując twierdzenie Jensena mamy nierówność

$$\left(\frac{1}{n}u_1+\frac{1}{n}u_2+\cdots+\frac{1}{n}u_n\right)^{\frac{p}{q}}\leq\frac{1}{n}u_1^{\frac{p}{q}}+\frac{1}{n}u_2^{\frac{p}{q}}+\cdots+\frac{1}{n}u_n^{\frac{p}{q}}$$

Dla $u_1,u_2,\cdots,u_n>0$. Podstawmy $u_k=a_k^q$ dla $k=1,2,\cdots,n$. Wtedy mamy nierówność

$$\left(\frac{a_1^q+a_2^q+\cdots+a_n^q}{n}\right)^{\frac{p}{q}}\leq\frac{a_1^p+a_2^p+\cdots+a_n^p}{n}$$

Wystarczy teraz podnieś obie strony nierówności (dodatnie) do potęgi o wykładniku $\frac{1}{p}$.

Zadanie 5. Niech $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$. Wykaż, że zachodzi nierówność między średnią geometryczną a średnią harmoniczną:

$$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n}\geq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

Rozwiązanie:

Przyjmujemy w nierówności Couchy'ego $u_k=\frac{1}{a_k}$ dla $k=1,1,\cdots,n$. Wtedy

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}}$$

Skąd wynika żądana nierówność.

Zadanie 6. Niech $g(x) = D(x^2)$ dla $x \in R$, gdzie D jest funkcją Dirichleta. Czy funkcja g jest okresowa?

Rozwiązanie:

Przypuśćmy, że funkcja g jest okresowa i oznaczmy przez $T(T \neq 0)$ jej okres. Mamy wtedy $g(x+T) = g(x)$ dla $x \in R$, czyli

$D((x+T)^2) = D(x^2)$ dla $x \in R$

1. Podstawmy $x = 0$. Wtedy $D(T^2) = D(0)$, czyli $D(T^2) = 1$, skąd

$$T^2 \in W$$

2. Podstawmy $x = 1$. Wtedy $D((1+T)^2) = D(1^2)$, czyli $D(1+2T+T^2) = D(1)$, a więc $D(1+2T+T^2) = 1$, skąd $1+2T+T^2 \in W$. Stąd i z wniosku poprzedniego otrzymujemy, że

$$T \in W$$

3. Podstawmy $x = \sqrt{2}$. Wtedy $D\left(\left(\sqrt{2}+T\right)^2\right) = D\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$, czyli $D\left(2+2\sqrt{2}T+T^2\right) = D(2)$, a więc $D\left(2+2\sqrt{2}T+T^2\right) = 1$, skąd $2+2\sqrt{2}T+T^2 \in W$. To jednak jest sprzeczne z warunkami wyprowadzonymi powyżej, gdyż liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna.

Odp.: Funkcja g nie jest okresowa.