

Nieznany świat

Rozwiąż równania podane poniżej:

a) $x^3 - 2x + 1 = 0$

b) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 2$

c) $x^{\log x} = 100x$

d) $1 + x^2 = \cos x$

Rozwiązanie

a) $x^3 - 2x + 1 = 0$

$$x^3 - x - x + 1 = 0$$

$$x(x^2 - 1) - (x - 1) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 1) - (x - 1) = 0$$

$$(x - 1)[x(x + 1) - 1] = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x - 1 = 0 \quad \text{lub} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad \Delta = 5$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5}$$

$$x = 1 \quad \text{lub} \quad x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

b) $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 2$

Wystarczy zauważyć, że

$$0 < 2 - \sqrt{3} < 0,5$$

$$3,5 < 2 + \sqrt{3} < 4$$

Równanie spełnia tylko $x=0$

c) $x^{\log x} = 100x$

$$\log x^{\log x} = \log 100x$$

$$\log x \cdot \log x = \log 100 + \log x$$

$$(\log x)^2 = 2 + \log x$$

Zastosujmy podstawienie

$$t = \log x$$

Wówczas

$$t^2 = 2 + t$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Delta = 9$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

$$t = -1 \quad \text{lub} \quad t = 2$$

$$\log x = -1 \quad \text{lub} \quad \log x = 2$$

$$x = 0,1 \quad \text{lub} \quad x = 100$$

d) $1 + x^2 = \cos x$

Zauważ, że $1 + x^2 \geq 1$ a $-1 \leq \cos x \leq 1$

Równość zajdzie tylko dla $x = 0$