Poszukiwania wielościanów

Zadanie 1.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany trójkątne i wszystkie kąty trójścienne, to ten wielościan jest czworościanem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{3S}{2}$ i $k = \frac{3w}{2}$. Stąd $s = \frac{2k}{3}$ i $w = \frac{2k}{3}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{2k}{3} + \frac{2k}{3} - k = 2$$

$$2k + 2k - 3k = 6$$

$$k = 6$$

w konsekwencji $s = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$ i $w = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$, czyli mamy czworościan

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany trójkątne i wszystkie kąty czworościenne, to ten wielościan jest ośmiościanem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{2s}{3}$ i $k = \frac{4w}{2}$. Stąd $s = \frac{2k}{3}$ i $w = \frac{k}{2}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{k}{2} + \frac{2k}{3} - k = 2$$

$$3k + 4k - 6k = 12$$

$$k = 12$$

W konsekwencji $s = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$ i $w = \frac{12}{2} = 6$, czyli mamy ośmiościan.

Zadanie 3.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany czworokątne i wszystkie kąty trójkątne, to ten wielościan jest sześcianem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{4s}{2}$ i $k = \frac{3w}{2}$. Stąd $s = \frac{k}{2}$ i $w = \frac{2k}{3}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} - k = 2$$

$$4k + 3k - 6k = 12$$

$$k = 12$$

W konsekwencji $s = \frac{12}{2} = 6$ i $w = \frac{2\cdot 12}{3} = 8$, czyli mamy sześcian.

Zadanie 4.

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma wszystkie ściany czworokątne i wszystkie kąty czworościenne?

Odpowiedź

Nie. To wynika z zadania 3 rozwiązanego w artykule „Zadania Eulera”.

Trójkątne zadania

Zadanie 1.

Czy z odcinków o długości $\left(\frac{2}{3}\right)^{1000}$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^{1001}$ oraz $\left(\frac{2}{3}\right)^{1002}$ można zbudować trójkąt?

Odpowiedź

Tak, gdyż

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1002} + \left(\frac{2}{3}\right)^{1001} - \left(\frac{2}{3}\right)^{1000} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1000}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^{1000}\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 1\right)$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{1000} > 0$$

Zadanie 2.

Niech *a, b, c* oznaczają długości boków trójkąta. Wykaż, że:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}<\frac{5}{a+b+c}$$

Rozwiązanie

Przekształcamy równoważnie podaną nierówność

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}<\frac{5}{a+b+c}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)<5$$

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}<5$$

$$\left(1+\frac{c}{a+b}\right)+\left(1+\frac{a}{b+c}\right)+\left(1+\frac{b}{c+a}\right)<5$$

$$3+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<5$$

$$\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}<2$$

Co jest prawdą na mocy zadania 2.b) z artykułu „Nierówności w trójkącie".

Zadanie 3.

Wykaż, że w trójkącie o bokach długości *a, b, c* i wysokościach h_a, h_b, h_c oraz polu S zachodzi nierówność

$$(a+b+c)\cdot(h_a+h_b+h_c)\geq 18S$$

Rozwiązanie

Mamy $h_a=\frac{2S}{a}, h_b=\frac{2S}{b}, h_c=\frac{2S}{c}$. Zatem mamy udowodnić, że

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{2S}{a}+\frac{2S}{b}+\frac{2S}{c}\right)\geq 18S$$

czyli

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$$

Teraz wystarczy skorzystać z nierówności $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

Zadanie 4.

Niech *a, b, c* będą długościami boków trójkąta, zaś α, β, ɣ oznaczają miary (w stopniach) kątów leżących odpowiednio naprzeciw tych boków. Wykaż, że:

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60°$$

Rozwiązanie

Załóżmy, bez zmniejszania ogólności rozważań, że $a \geq b \geq c$. Wtedy $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

Zatem

$$\underbrace{(a - b)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha - \beta)}_{\geq 0} + \underbrace{(a - c)}_{\geq 0}\underbrace{(\alpha - \gamma)}_{\geq 0} + \underbrace{(b - c)}_{\geq 0}\underbrace{(\beta - \gamma)}_{\geq 0} \geq 0$$

Przekształćmy powyższą nierówność:

$$(a\alpha - a\beta - b\alpha + b\beta) + (a\alpha - a\gamma - c\alpha + c\gamma) + (b\beta - b\gamma - c\beta + c\gamma) \geq 0$$

$$(a\alpha + b\beta) + (a\alpha + c\gamma) + (b\beta + c\gamma) \geq (a\beta + b\alpha) + (a\gamma + c\alpha) + (b\gamma + c\beta) \geq 0$$

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (b + c)\alpha + (a + c)\beta + (a + b)\gamma$$

$$2(a\alpha + b\beta + c\gamma) + a\alpha + b\beta + c\gamma \geq (a + b + c)\alpha + (a + b + c)\beta + (a + b + c)\gamma$$

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a + b + c)(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$3(a\alpha + b\beta + c\gamma) \geq (a + b + c) \cdot 180°$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma \geq (a + b + c) \cdot 600°$$

$$\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} \geq 60°$$