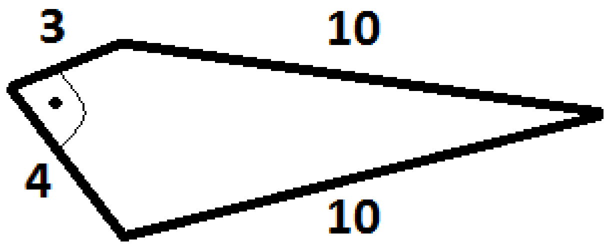
Pole Greka

Zadanie

Oblicz pole poniżej narysowanej figury. A może skorzystasz ze wzoru Herona?



Rozwiązanie

Powyższy czworokąt można podzielić na trójkąt prostokątny egipski o bokach 3; 4; i 5 i trójkąt równoramienny o bokach 10; 10 i 5.

Dla pierwszego trójkąta $p = 6$, a dla drugiego trójkąta p=12,5

Pole całego czworokąta równe jest sumie pól tych trójkątów, czyli:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} &= \sqrt{\mathbf{6 \cdot (6-3) \cdot (6-4) \cdot (6-5)}} + \sqrt{\mathbf{12,5 \cdot (12,5-5) \cdot (12,5-10) \cdot (12,5-10)}} \\ &= \sqrt{\mathbf{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} + \sqrt{\mathbf{12,5 \cdot 7,5 \cdot 2,5 \cdot 2,5}} = \sqrt{\mathbf{36}} + \sqrt{\mathbf{585,9375}} \\ &= \mathbf{6 + 6,25\sqrt{15}}\end{aligned}$$

Poszukiwania wielokątów

Zadanie 1.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany trójkątne i wszystkie kąty trójścienne, to ten wielościan jest czworościanem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{3S}{2}$ i $k = \frac{3w}{2}$. Stąd $s = \frac{2k}{3}$ i $w = \frac{2k}{3}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{2k}{3} + \frac{2k}{3} - k = 2$$

$$2k + 2k - 3k = 6$$

$$k = 6$$

W konsekwencji $s = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$ i $w = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$, czyli mamy czworościan

Zadanie 2.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany trójkątne i wszystkie kąty czworościenne, to ten wielościan jest ośmiościanem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{2s}{3}$ i $k = \frac{4w}{2}$. Stąd $s = \frac{2k}{3}$ i $w = \frac{k}{2}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{k}{2} + \frac{2k}{3} - k = 2$$

$$3k + 4k - 6k = 12$$

$$k = 12$$

W konsekwencji $s = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$ i $w = \frac{12}{2} = 6$, czyli mamy ośmiościan.

Zadanie 3.

Udowodnij, że jeśli wielościan wypukły ma wszystkie ściany czworokątne i wszystkie kąty trójkątne, to ten wielościan jest sześcianem.

Rozwiązanie

Mamy $k = \frac{4s}{2}$ i $k = \frac{3w}{2}$. Stąd $s = \frac{k}{2}$ i $w = \frac{2k}{3}$.

Po podstawieniu do wzoru Eulera $w + s - k = 2$ mamy

$$\frac{2k}{3} + \frac{k}{2} - k = 2$$

$$4k + 3k - 6k = 12$$

$$k = 12$$

W konsekwencji $s = \frac{12}{2} = 6$ i $w = \frac{2 \cdot 12}{3} = 8$, czyli mamy sześcian.

Zadanie 4.

Czy istnieje wielościan wypukły, który ma wszystkie ściany czworokątne i wszystkie kąty czworościenne?

Odpowiedź

Nie. To wynika z zadania 3 rozwiązanego w artykule „Zadania Eulera".