Sprzęgamy liczby

a) Uzasadnij, że jeśli liczba $\sqrt{2}$ jest pierwiastkiem wielomianu stopnia wyższego niż 1 o współczynnikach wymiernych, to liczba $(-\sqrt{2})$ także jest jego pierwiastkiem.

b) Uzasadnij, że dla każdego $n \in N^+$ liczba $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ jest całkowita.

c) Czy istnieją takie liczby naturalne $m; n > 0$, że $(2+\sqrt{5})^m = (3+\sqrt{5})^n$?

d) Czy istnieją takie liczby naturalne $m; n > 0$, że $(7-\sqrt{2})^m = (7+\sqrt{2})^n$? Zero nie jest liczbą naturalną.

Rozwiązania:

a) Mnożymy wielomian przez odpowiednią liczbę całkowitą dodatnią otrzymując wielomian, o całkowitych współczynnikach, którego liczba $\sqrt{2}$ jest również pierwiastkiem. Ponieważ $\sqrt{2} = 0 + 1 \cdot \sqrt{2}$, to na mocy podanego twierdzenia liczba $0 - 1 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}$ jest także pierwiastkiem tego wielomianu.

b) Wystarczy pokazać, że $\bar{z} = z$. Istotnie: $\bar{z} = \overline{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n} = \overline{(2+\sqrt{3})^n} + \overline{(2-\sqrt{3})^n} = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n = z$

c) Mamy $\overline{(2+\sqrt{5})^m} = \overline{(3+\sqrt{5})^n}$, czyli $(2-\sqrt{5})^m = (3-\sqrt{5})^n$. Zatem

$$(2-\sqrt{5})^m(2+\sqrt{5})^m = (3-\sqrt{5})^n(3+\sqrt{5})^n$$

$$\left((2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})\right)^m = \left((3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})\right)^n$$

$$\left(2^2 - (\sqrt{5})^2\right)^m = \left(3^2 - (\sqrt{5})^2\right)^n$$

$$(4-5)^m = (9-5)^n$$

$$(-1)^m = 4^n$$

Co dla $m; n \in N^+$ jest niemożliwe.

Odpowiedź: Takie *m; n* nie istnieją.

d) Załóżmy, że takie $m; n \in N^+$ istnieją. Ponieważ $1 < 7-\sqrt{2} < 7+\sqrt{2}$, to $m > n$. Po zastosowaniu sprzężenia mamy $(7+\sqrt{2})^m = (7-\sqrt{2})^n$, skąd $m < n$, bo $7+\sqrt{2} > 7-\sqrt{2} > 1$. Mamy więc sprzeczność.

Odpowiedź: Takie *m; n* nie istnieją