Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Trójkątne liczby

Zadanie 1. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb trójkątnych, których suma kwadratów jest kwadratem liczby naturalnej takim, że :

$$t_{n_k-1}^2 + t_{n_k}^2 = (n_k z_k)^2$$

Gdzie

$$z_1 = 5, \quad n_1 = 7$$

$$z_{k+1} = 3z_k + 2n_k, \quad n_{k+1} = 4z_k + 3n_k$$

Rozwiązanie:

Na początek udowodnimy indukcyjnie, że $2z_k^2 - n_k^2 = 1$. Ponieważ $z_1 = 5$ i $n_1 = 7$, więc

$$2z_1^2 - n_1^2 = 2 \cdot 5^2 - 7^2 = 2 \cdot 25 - 49 = 1$$

Tak więc warunek początkowy jest spełniony.

Załóżmy teraz, że prawdą jest, że

$$2z_p^2 - n_p^2 = 1 \; dla \; p \in N$$

Sprawdźmy, czy z naszego założenia wynika równanie

$$2z_{p+1}^2 - n_{p+1}^2 = 1$$

Ponieważ

$$z_{k+1} = 3z_k + 2n_k, \quad n_{k+1} = 4z_k + 3n_k$$

Więc

$$2z_{p+1}^2 - n_{p+1}^2 = 2\left(3z_p + 2n_p\right)^2 - \left(4z_p + 3n_p\right)^2 =$$

$$= 2\left(9z_p^2 + 12z_p n_p + 4n_p^2\right) - \left(16z_p^2 + 24z_p n_p + 9n_p^2\right) =$$

$$= 18z_p^2 + 24z_p n_p + 8n_p^2 - 16z_p^2 - 24z_p n_p - 9n_p^2 = 2z_p^2 - n_p^2 = 1$$

Co należało wykazać.

Przejdźmy teraz do naszego zadania.

Sprawdźmy nasze równanie dla $k = 1$.

$$t_{n_k-1}^2 + t_{n_k}^2 = t_{n_1-1}^2 + t_{n_1}^2 = t_{7-1}^2 + t_7^2 = t_6^2 + t_7^2 = 21^2 + 28^2 = (7 \cdot 3)^2 + (7 \cdot 4)^2 =$$

$$= 7^2 \cdot 3^2 + 7^2 \cdot 4^2 = 7^2 \cdot (3^2 + 4^2) = 7^2 \cdot (9 + 16) = 7^2 \cdot 25 = 7^2 \cdot 5^2 = (7 \cdot 5)^2 =$$

$$= (n_1 \cdot z_1)^2$$

Załóżmy, że

$$t_{n_p-1}^2 + t_{n_p}^2 = \left(n_p z_p\right)^2$$

Jest prawdziwy i sprawdźmy, czy z tej równości wynika równość

$$t_{n_{p+1}-1}^2 + t_{n_{p+1}}^2 = \left(n_{p+1} z_{p+1}\right)^2$$

Policzmy w takim razie

$$t_{n_{p+1}-1}^2 + t_{n_{p+1}}^2 - \left(n_{p+1} z_{p+1}\right)^2 = t_{4z_p+3n_p-1}^2 + t_{4z_p+3n_p}^2 - n_{p+1}^2 z_{p+1}^2 =$$

$$= \left(\frac{\left(4z_p + 3n_p - 1\right)\left(4z_p + 3n_p\right)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\left(4z_p + 3n_p\right)\left(4z_p + 3n_p + 1\right)}{2}\right)^2 -$$

$$-\left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left(3z_p + 2n_p\right)^2 =$$

$$= \frac{\left(4z_p + 3n_p - 1\right)^2 \left(4z_p + 3n_p\right)^2}{4} + \frac{\left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left(4z_p + 3n_p + 1\right)^2}{4} -$$

$$-\left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left(3z_p + 2n_p\right)^2 =$$

$$= \left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left[\frac{\left(4z_p + 3n_p - 1\right)^2}{4} + \frac{\left(4z_p + 3n_p + 1\right)^2}{4} - \left(3z_p + 2n_p\right)^2\right] =$$

$$= \left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left[\frac{16z_p^2 + 9n_p^2 + 1 + 24z_p n_p - 8z_p - 6n_p}{4} + \right]$$

$$\left[+ \frac{16z_p^2 + 9n_p^2 + 1 + 24z_p n_p + 8z_p + 6n_p}{4} - \left(9z_p^2 + 12z_p n_p + 4n_p^2\right)\right] =$$

$$= \left(4z_p + 3n_p\right)^2 \left(-z_p^2 + \frac{1}{2} n_p^2 + \frac{1}{2}\right) =$$

Skorzystamy teraz z własności

$$2z_p^2 - n_p^2 = 1$$

I mamy

$$= (4z_p + 3n_p)^2 \left(-\frac{2z_p^2 - n_p^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = (4z_p + 3n_p)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

Co należało dowieść

Zadanie 2. Udowodnij, że: $1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{n-1} = t_{\frac{3^n - 1}{2}}$

Rozwiązanie:

Sprawdzamy prawdziwość wzoru dla $n = 1$

$$t_{\frac{3^n-1}{2}} = t_{\frac{3^1-1}{2}} = t_1 = 1$$

Sprawdźmy teraz, czy z założenia:

$$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{n-1} = t_{\frac{3^n-1}{2}}$$

Wynika teza

$$1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{n-1} + 9^n = t_{\frac{3^{n+1}-1}{2}}$$

Zajmijmy się lewą stroną powyższego równania:

$$L = 1 + 9 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{n-1} + 9^n = t_{\frac{3^n-1}{2}} + 9^n =$$

Z definicji t_n mamy

$$= \frac{\frac{3^n - 1}{2} \cdot \left(\frac{3^n - 1}{2} + 1\right)}{2} + \frac{2 \cdot 9^n}{2} = \frac{\frac{3^n - 1}{2} \cdot \left(\frac{3^n - 1}{2} + \frac{2}{2}\right) + 2 \cdot 9^n}{2} =$$

$$= \frac{\frac{3^n - 1}{2} \cdot \left(\frac{3^n - 1 + 2}{2}\right) + 2 \cdot 9^n}{2} = \frac{\frac{(3^n - 1)(3^n + 1)}{4} + 2 \cdot 9^n}{2} = \frac{\frac{3^{2n} - 1}{4} + \frac{8 \cdot 9^n}{4}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{3^{2n} - 1 + 8 \cdot (3^2)^n}{4}}{2} = \frac{3^{2n} - 1 + 8 \cdot 3^{2n}}{8} = \frac{9 \cdot 3^{2n} - 1}{8} = \frac{3^2 \cdot 3^{2n} - 1}{8} = \frac{3^{2n+2} - 1}{8}$$

Teraz przekształćmy stronę prawą naszej tezy:

$$P = t_{\frac{3^{n+1}-1}{2}} =$$

Z definicji t_n mamy:

$$\frac{\frac{3^{n+1}-1}{2} \cdot \left(\frac{3^{n+1}-1}{2} + 1\right)}{2} = \frac{\frac{3^{n+1}-1}{2} \cdot \left(\frac{3^{n+1}-1}{2} + \frac{2}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3^{n+1}-1}{2} \cdot \frac{3^{n+1}-1+2}{2}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{(3^{n+1}-1)(3^{n+1}+1)}{4}}{2} = \frac{(3^{n+1})^2 - 1}{8} = \frac{3^{2n+2}-1}{8}$$

Czyli

$$L = P$$

Co należało udowodnić