Poszukiwania złota

Zadanie 1. Dokonano złotego podziału pręta o długości 5 m. Wyznacz długość każdego z kawałków tak podzielonego pręta.

Rozwiązanie:

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{x}$$

$$x^2 = 5y$$

I

$$x + y = 5$$

$$x + \frac{x^2}{5} = 5$$

$$x^2 + 5x - 25 = 0$$

$$\Delta = 25 + 100 = 125$$

$$\sqrt{\Delta} = 5\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-5\sqrt{5} - 5}{2} \approx -8{,}09$$

$$x_2 = \frac{5\sqrt{5} - 5}{2} \approx 3{,}09$$

Jeden kawałek ma 3,09 m, a drugi 1,91m.

Zadanie 2. Za pomocą jednego cięcia dokonano podziału złotego prostokąta na kwadrat i prostokąt. Wyznacz wymiary otrzymanego prostokąta wiedząc, że odcięty kwadrat ma pole 64 cm^2.

Rozwiązanie:

$$\frac{\mathbf{8} + \boldsymbol{x}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{8}}{\boldsymbol{x}}$$

$$x^2 + 8x - 64 = 0$$

$$\Delta = 64 + 256 = 320$$

$$\sqrt{\Delta} = 8\sqrt{5}$$

$$x_1 = \frac{-8\sqrt{5} - 8}{2} \approx -12{,}9$$

$$x_2 = \frac{8\sqrt{5} - 8}{2} \approx 4{,}9$$

Prostokąt ma wymiary 8cm x 4,9 cm

Zadanie 3. Niech ϕ będzie złotą liczbą. Następujące wielkości: $\varphi^{-1};\ \varphi^0;\ \varphi^1;\ \varphi^2;\ \varphi^3;\ \varphi^4;\ \varphi^5$ przedstaw w postaci $a\varphi + b$, gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi. Jeśli wykonasz to zadanie poprawnie, to powinieneś dostrzec pewną zaskakującą prawidłowość. Stosując tę prawidłowość zapisz: φ^{10} i φ^{15}.

Rozwiązanie:

Przypominamy, że

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\varphi^{-1} = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

$$\boldsymbol{\varphi^0 = 1}$$

$$\varphi^1 = \varphi$$

$$\varphi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = \frac{5 + 2\sqrt{5} + 1}{4} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} = \frac{2(\sqrt{5}+3)}{4} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1+2}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (\varphi + 1)\varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (2\varphi + 1)\varphi = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 2 + \varphi = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (3\varphi + 2)\varphi = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3(\varphi + 1) + 2\varphi = 3\varphi + 3 + 2\varphi = 5\varphi + 3$$

Aby zauważyć interesującą nas prawidłowość zapiszmy wyprowadzone wzory inaczej:

$$\varphi^1 = \varphi = F_1\varphi$$

$$\varphi^2 = \varphi + 1 = F_2\varphi + F_1$$

$$\varphi^3 = 2\varphi + 1 = F_3\varphi + F_2$$

$$\varphi^4 = 3\varphi + 2 = F_4\varphi + F_3$$

$$\varphi^5 = 5\varphi + 3 = F_5\varphi + F_3$$

Gdzie F_n to kolejne wyrazy ciągu Fibonacciego. Można, więc wykazać, że

$$\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

Czyli

$$\varphi^{10} = 55\varphi + 34$$

$$\varphi^{15} = 610\varphi + 377$$