Jacek Kredenc – szkic rozwiązania

Czy to możliwe?

Zadanie 1. Wykaż, że $\underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{22\cdots22}_{n\ dwójek} = \underbrace{66\cdots66}_{n\ szóstek}\cdot\underbrace{66\cdots6}_{n-1\ szóstek}7$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu przyjmiemy oznaczenie:

$$L = \underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek}$$

$$\underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{22\cdots22}_{n\ dwójek} = \underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{00\cdots00}_{n\ zer} + \underbrace{22\cdots22}_{n\ dwójek} = 10^n\cdot 4\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} + 2\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} =$$

$$= 4\cdot 10^n L + 2L = 2L(2\cdot 10^n + 1) = 2L\left(2\cdot\left(\underbrace{99\cdots99}_{n\ dziewiątek} + 1\right) + 1\right) =$$

$$= 2L\left(2\cdot\left(9\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} + 1\right) + 1\right) = 2L(2\cdot(9L+1)+1) = 2L(18L+2+1) =$$

$$= 2L(18L+3) = 6L(6L+1) = 6\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek}\left(6\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} + 1\right) =$$

$$= \underbrace{66\cdots66}_{n\ szóstek}\cdot\left(\underbrace{66\cdots66}_{n\ szóstek} + 1\right) = \underbrace{66\cdots66}_{n\ szóstek}\cdot\underbrace{66\cdots6}_{n-1\ szóstek}7$$

Zadanie 2. Wykaż, że $\underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{88\cdots8}_{n-1\ ósemek}9 = \underbrace{66\cdots6}_{n-1\ szóstek}7^2$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu przyjmiemy oznaczenie:

$$L = \underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek}$$

$$\underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{88\cdots8}_{n-1\ ósemek}9 = \underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{00\cdots00}_{n\ zer} + \underbrace{88\cdots8}_{n-1\ ósemek}0 + 9 =$$

$$= \underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek}\underbrace{00\cdots00}_{n\ zer} + \underbrace{88\cdots88}_{n\ ósemek} + 1 = 10^n\cdot\underbrace{44\cdots44}_{n\ czwórek} + 8\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} + 1 =$$

$$= 10^n\cdot 4\cdot\underbrace{11\cdots11}_{n\ jedynek} + 8L + 1 = 4\cdot 10^n L + 8L + 1 = 4\cdot\left(\underbrace{99\cdots99}_{n\ dziewiątek} + 1\right)L + 8L + 1 =$$

$$= 4 \cdot \left(9 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{n\ jedynek} + 1\right)L + 8L + 1 = 4 \cdot (9L + 1)L + 8L + 1 = 36L^2 + 4L + 8L + 1 =$$

$$= 36L^2 + 12L + 1 = (6L + 1)^2 = \left(6 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{n\ jedynek} + 1\right)^2 = \left(\underbrace{66 \cdots 66}_{n\ szóstek} + 1\right)^2 = \underbrace{66 \cdots 6}_{n-1\ szóstek}7^2$$

Zadanie 3. Wykaż, że $\frac{1\overbrace{33\cdots33}^{n\ trójek}2}{2\underbrace{33\cdots33}_{n\ trójek}1} = \frac{12}{21}$

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu przyjmiemy oznaczenie:

$$L = \underbrace{11 \cdots 11}_{n\ jedynek}$$

$$\frac{1\overbrace{33 \cdots 33}^{n\ trójek}2}{2\underbrace{33 \cdots 33}_{n\ trójek}1} = \frac{1\overbrace{00 \cdots 000}^{n+1\ zer} + \overbrace{33 \cdots 33}^{n\ trójek}0 + 2}{2\underbrace{00 \cdots 000}_{n+1\ zer} + \underbrace{33 \cdots 33}_{n\ trójek}0 + 1} = \frac{10^{n+1} + 10 \cdot \overbrace{33 \cdots 33}^{n\ trójek} + 2}{2 \cdot 10^{n+1} + 10 \cdot \underbrace{33 \cdots 33}_{n\ trójek} + 1} =$$

$$= \frac{10 \cdot 10^n + 10 \cdot 3 \cdot \overbrace{11 \cdots 11}^{n\ jedynek} + 2}{10 \cdot 2 \cdot 10^n + 10 \cdot 3 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{n\ jedynek} + 1} = \frac{10 \cdot \left(\overbrace{99 \cdots 99}^{n\ dziewiątek} + 1\right) + 10 \cdot 3L + 2}{10 \cdot 2 \cdot \left(\underbrace{99 \cdots 99}_{n\ dziewiątek} + 1\right) + 10 \cdot 3L + 1} =$$

$$= \frac{10 \cdot \left(9 \cdot \overbrace{11 \cdots 11}^{n\ jedynek} + 1\right) + 10 \cdot 3L + 2}{10 \cdot 2 \cdot \left(9 \cdot \underbrace{11 \cdots 11}_{n\ jedynek} + 1\right) + 10 \cdot 3L + 1} = \frac{10(9L + 1) + 10 \cdot 3L + 2}{10 \cdot 2 \cdot (9L + 1) + 10 \cdot 3L + 1} =$$

$$= \frac{90L + 10 + 30L + 2}{180L + 20 + 30L + 1} = \frac{120L + 12}{210L + 21} = \frac{12(10L + 1)}{21(10L + 1)} = \frac{12}{21}$$