Dowody trójkąta

Spróbujcie rozwiązać niełatwe zadania z trygonometrii. W jednym zadaniu występuje funkcja kotangens (ctg), która jest odwrotnością funkcji tangens. Możemy zatem zapisać: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Zadanie 1.

W trójkącie, którego boki maja długości: a; b; c i środkowe m_a; m_b; m_c. Wykaż, że:

1) $\frac{m_a^2+m_b^2+m_c^2}{a^2+b^2+c^2} > \frac{3}{4}$,

2) $m_a^2 + m_b^2 > \frac{9}{8}c^2$. Wskazówka: skorzystaj z nierówności $\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$ i $(m_a - m_b)^2 \geq 0$.

Ad 1) Udowodniono w artykule „Trójkątne zadania” po pierwszym zadaniu.

Ad 2) Z własności udowodnionych w tekście i z nierówności trójkąta wynika, że

$$\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b > c$$

Podnieśmy obustronnie do kwadratu

$$\left(\frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b\right)^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}m_a \cdot \frac{2}{3}m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

Ponieważ kwadrat jest nieujemny, więc prawdziwa jest następująca nierówność”

$$(m_a - m_b)^2 \geq 0$$

$$m_a^2 - 2m_a m_b + m_b^2 \geq 0$$

$$m_a^2 + m_b^2 \geq 2m_a m_b$$

Ponieważ w nierówności

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{8}{9}m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot 2m_a \cdot m_b + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

Więc, gdy jeden ze składników zastąpimy czymś większym nierówność będzie nadal prawdziwa

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot (m_a^2 + m_b^2) + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{4}{9}m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot m_a^2 + \frac{4}{9} \cdot m_b^2 + \frac{4}{9}m_b^2 > c^2$$

$$\frac{8}{9}m_a^2 + \frac{8}{9} \cdot m_b^2 > c^2$$

$$\frac{8}{9}(m_a^2 + m_b^2) > c^2$$

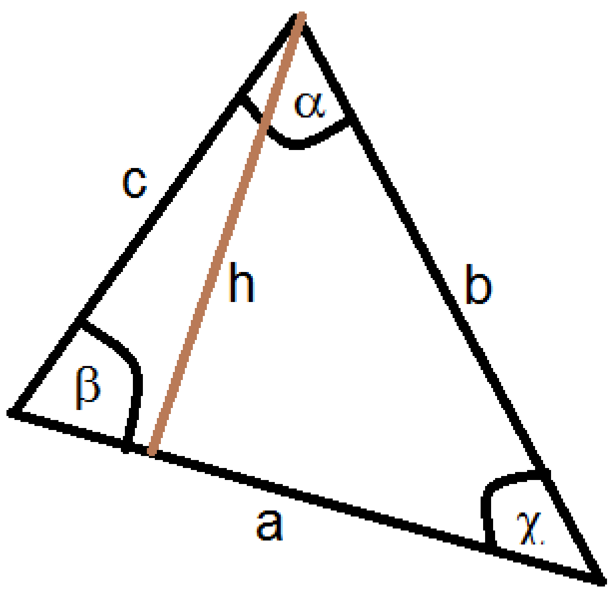
$$m_a^2 + m_b^2 > \frac{9}{8}c^2$$

Zadanie 2.

Wykaż że jeśli α; β; ɣ są kątami trójkąta o bokach a; b; c i polu S, to:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$$

Rozwiązanie



Przy założeniu , że a jest podstawą

$$S = \frac{1}{2}ah$$

Gdzie h można wyliczyć albo ze wzoru

$$h = c\sin\beta$$

albo

$$h = b\sin\gamma$$

W pierwszym przypadku

$$S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$

W drugim przypadku

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Gdyby przyjąć za podstawę trójkąta bok c, wówczas

$$S = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$$

Z tych wzorów można wyznaczyć

$$\sin\alpha = \frac{2S}{cb}$$

$$\sin\beta = \frac{2S}{ac}$$

$$\sin\gamma = \frac{2S}{ab}$$

Z twierdzenia kosinusów mamy następujące wzory

$$c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha = a^2$$

$$a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2abc\cos\gamma = c^2$$

Z tych wzorów można wyznaczyć: $\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Ponieważ

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\frac{2S}{cb}} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S}$$

Podobnie

$$\cot\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\frac{2S}{ac}} = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S}$$

$$\cot\gamma = \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{2S}{ab}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S}$$

Po dodaniu stronami tych wzorów mamy

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2}{4S} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4S} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4S} =$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2+a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{4S} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

Zadanie 3

Wykaż, że jeśli a; b; c są długościami boków trójkąta, zaś α; β; ɣ są kątami tego trójkąta leżącymi odpowiednio naprzeciw tych boków i $a < \frac{b+c}{2}$, to $\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$

Rozwiązanie

Sprawdźmy co wynika z założenia

$$a < \frac{b+c}{2}$$

$$2a < b+c$$

Pomnóżmy obie strony nierówności przez (-1)

$$-2a > -(b+c)$$

Niech Ob – obwód trójkąta. Wówczas

$$Ob = a + b + c$$

$$a = Ob - (b + c)$$

Do obu stron nierówności dodajmy Ob.

$$Ob - 2a > Ob - (b + c)$$

$$Ob - 2a > a$$

$$Ob > 3a$$

$$a < \frac{1}{3}Ob$$

Sprawdźmy jeszcze jaki warunek musi spełniać kąt α aby była spełniona nierówność z tezy

$$\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$

$$2\alpha < \beta + \gamma$$

Obie strony nierówności mnożymy przez (-1)

$$-2\alpha > -(\beta + \gamma)$$

Ale

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^o$$

Więc

$$\alpha = 180^o - (\beta + \gamma)$$

Wróćmy do naszej nierówności i do obu stron dodajmy 180^o

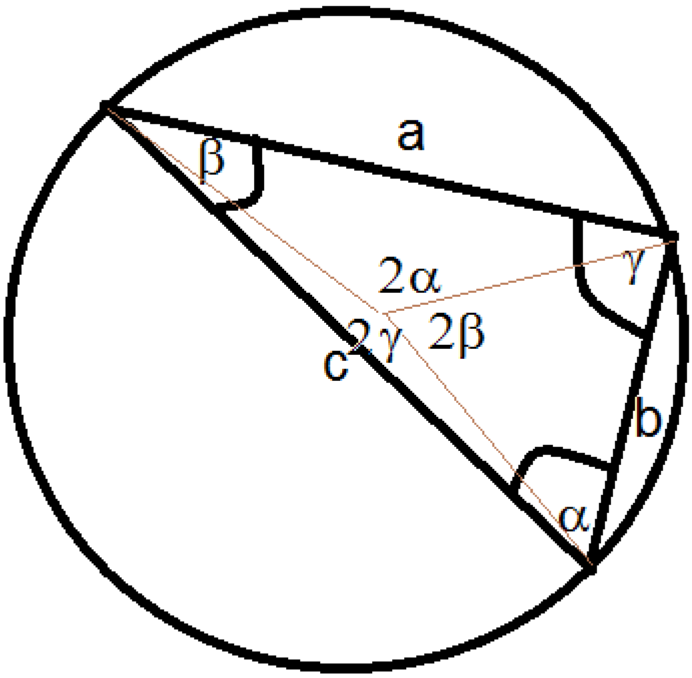
$$180^o - 2\alpha > 180^o - (\beta + \gamma)$$

$$180^o - 2\alpha > \alpha$$

$$180^o > 3\alpha$$

$$\alpha < 60^o$$

Popatrzmy teraz na rysunek



Ponieważ na każdym trójkącie można opisać okrąg więc boki tego trójkąta są cięciwami odpowiednich łuków, a jego kąty są kątami wpisanymi w ten okrąg. Kąt α leżący naprzeciw boku a jest kątem wpisanym opartym na łuku, którego cięciwą jest bok a. Ponieważ bok ten jest mniejszy od $\frac{1}{3}$ obwodu trójkąta, więc interesujący nas łuk jest mniejszy od $\frac{1}{3}$ całego okręgu i dlatego kąt α jest mniejszy od 60^o, czyli spełnia nierówność

$$\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$$