Zadanie:Witold Bednarek
Rozwiązanie: Jacek Kredenc

# Na olimpiadę

Zadanie 1
Rozwiąż równanie $[x] = \frac{1}{2}x + 4$

Zadanie 2
Niech $n \geq 1$ będzie daną liczbą naturalną. Wykaż, że równanie: $[x] = \frac{n}{n+1}x$ ma dokładnie n rozwiązań

Zadanie 3
Wykaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a zachodzi równość $[a] + \left[a + \frac{1}{3}\right] + \left[a + \frac{2}{3}\right] = [3a]$.

## Rozwiązania

**Zadanie 1.**
x=8

**Zadanie 2.**

**Rozwiązanie:**
Niech x= m+α, gdzie m jest liczbą całkowitą, a liczba α spełnia warunek $0 \leq \alpha < 1$
Wówczas zachodzi
$[x] = m$
Więc
$$m = \frac{n}{n+1}x$$
skąd
$$x = \frac{n+1}{n}m$$
Z definicji części całkowitej mamy
$$m \leq \frac{n+1}{n}m < m + 1$$
Powyższą nierówność podwójną można rozbić na dwie nierówności pojedyncze
$m \leq \frac{n+1}{n}m$ i $\frac{n+1}{n}m < m + 1$
Przekształćmy pierwszą nierówność:
$$m \leq \frac{n+1}{n}m$$
$$nm \leq nm + m$$
$$0 \leq m$$
A teraz drugą nierówność
$$\frac{n+1}{n}m < m + 1$$
$$nm + m < mn + n$$
$$m < n$$
Z otrzymanych warunków i z warunku, że m jest liczbą całkowitą wynika, że m może być zerem lub dowolną liczbą naturalną mniejszą od n, a takich liczb jest n-1, co kończy dowód.

**Zadanie 3**
Niech a= m+α, gdzie m jest liczbą całkowitą, a liczba α spełnia warunek $0 \leq a < 1$
Rozpatrzmy trzy przypadki:

**Przypadek 1**
Niech
$0 \leq a < \frac{1}{3}$
Wówczas
$[a] = m$
$[a + \frac{1}{3}] = [m + a + \frac{1}{3}] = m$, bo $a + \frac{1}{3} < 1$

$[a + \frac{2}{3}] = [m + a + \frac{2}{3}] = m$, bo $a + \frac{2}{3} < 1$
więc
$[a] + [a + \frac{1}{3}] + [a + \frac{2}{3}] = 3\text{m}$
$[3\text{a}] = [3(m + a)] = [3\text{m} + 3\text{a}] = 3\text{m}$, bo $3\text{a} < 1$
Lewa strona równa się prawej

**Przypadek 2**
Niech
$\frac{1}{3} \leq a < \frac{2}{3}$
Wówczas
$[a] = m$
$[a + \frac{1}{3}] = [m + a + \frac{1}{3}] = m$, bo $\frac{2}{3} \leq a + \frac{1}{3} < 1$

$[a + \frac{2}{3}] = [m + a + \frac{2}{3}] = m + 1$, bo $1 \leq a + \frac{2}{3} < 1\frac{1}{3}$
więc
$[a] + [a + \frac{1}{3}] + [a + \frac{2}{3}] = 3\text{m} + 1$
$[3\text{a}] = [3(m + a)] = [3\text{m} + 3\text{a}] = 3\text{m} + 1$, bo $1 \leq 3\text{a} < 2$
Lewa strona równa się prawej

**Przypadek 3**
Niech
$\frac{2}{3} \leq a < 1$
Wówczas
$[a] = m$
$[a + \frac{1}{3}] = [m + a + \frac{1}{3}] = m + 1$, bo $1 \leq a + \frac{1}{3} < 1\frac{1}{3}$

$[a + \frac{2}{3}] = [m + a + \frac{2}{3}] = m + 1$, bo $1\frac{1}{3} \leq a + \frac{2}{3} < 1\frac{2}{3}$
więc
$[a] + [a + \frac{1}{3}] + [a + \frac{2}{3}] = 3\text{m} + 2$

$[3a] = [3(m + a)] = [3m + 3a] = 3m + 2$, bo $2 \leq 3a < 2\frac{1}{3}$
Lewa strona równa się prawej