Jacek Kredenc

Pokrycie płaszczyzny

W jaki sposób wykonać parkietaż. Płaszczyznę będziemy pokrywać:

a) Kwadratami i ośmiokątami foremnymi,

b) Trójkątami równobocznymi i dwunastokątami foremnymi?

Rozwiązanie

pkt. a)

Kąt wewnętrzny kwadratu ma 90^o. Obliczmy kąt wewnętrzny ośmiokąta foremnego. Wykorzystamy wzór:

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180^o$$

Ponieważ n=8, więc mamy:

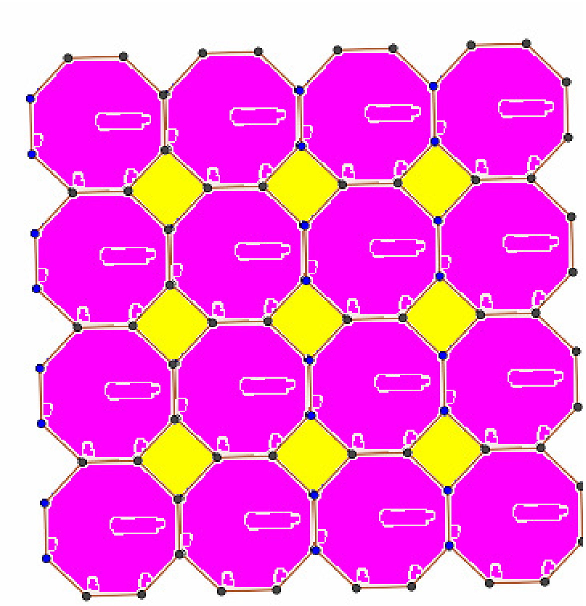
$$\alpha = \frac{8-2}{8} \cdot 180^o = \frac{6}{8} \cdot 180^o = \frac{3}{4} \cdot 180^o = 3 \cdot 45^o = 135^o$$

W takim razie należy w liczbach całkowitych dodatnich rozwiązać równanie

$$k_4 \cdot 90^o + k_8 \cdot 135^o = 360^0$$

$$2k_4 + 3k_8 = 8$$

Rozwiązaniem tego równania jest $k_4 = 1;\ k_8 = 2$. Oznacza to, że w węzłach parkietu muszą się spotykać dwa ośmiokąty foremne i jeden kwadrat.



pkt. b)

Kąt wewnętrzny w trójkącie równobocznym wynosi 60°. Wyznaczmy kąt wewnętrzny dwunastokąta foremnego:

$$\alpha = \frac{12-2}{12} \cdot 180^{\circ}$$

Ponieważ n=12, więc mamy:

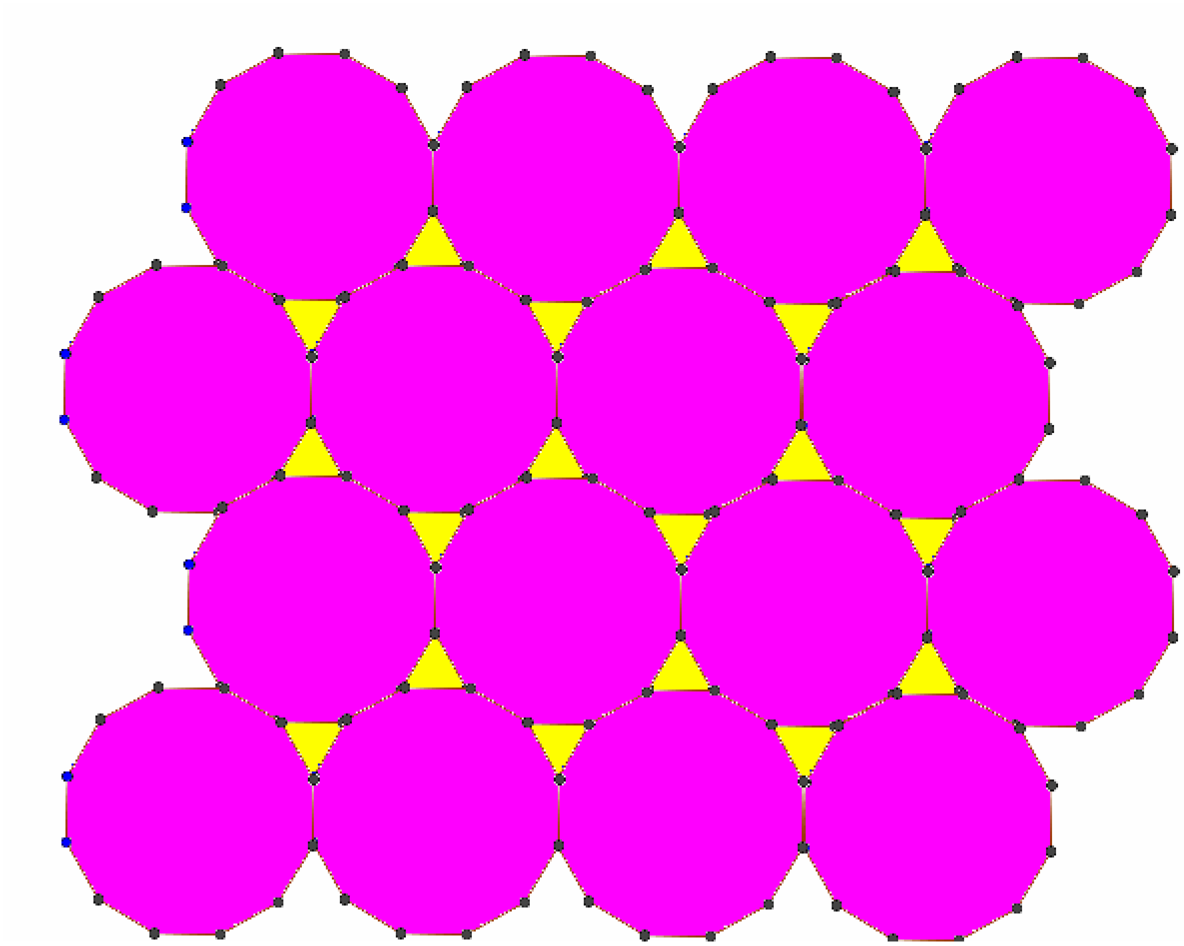
$$\alpha = \frac{12-2}{12} \cdot 180^{\circ} = \frac{10}{12} \cdot 180^{\circ} = \frac{5}{6} \cdot 180^{\circ} = 5 \cdot 30^{\circ} = 150^{\circ}$$

W takim razie należy w liczbach całkowitych dodatnich rozwiązać równanie

$$k_3 \cdot 60^{\circ} + k_{12} \cdot 150^{\circ} = 360^{0}$$

$$2k_3 + 5k_{12} = 12$$

Rozwiązaniem tego równania jest $k_3 = 1;\ k_{12} = 2$. Oznacza to, że w węzłach parkietu muszą się spotykać dwa dwunastokąty foremne i jeden trójkąt równoboczny.



Problem 1.

Dla jakich $m > n \geq 3$ można pokryć płaszczyznę m-kątami foremnymi i n-kątami foremnymi?

Rozwiązanie

Z tekstu artykułu „Zadanie na parkiet" wiemy, że warunki zadania spełniają: kwadraty z trójkątami równobocznymi i sześciokąty foremne z trójkątami równobocznymi. Z poprzedniego zadania wiemy, że parami nadającymi się na parkiet są jeszcze: ośmiokąty foremne z kwadratami i dwunastokąty foremne z trójkątami równobocznymi. Obecnie sprawdzimy, czy istnieją jeszcze jakieś inne pary figur.

Aby warunki były spełnione m musi wynosić co najmniej 4. Wówczas n będzie równe 3, ale problem parkietu zbudowanego z kwadratów i trójkątów równobocznych został rozwiązany we wspomnianym powyżej artykule.

Gdy m=5, to n może być równe 3 lub 4. Jak łatwo obliczyć kąt wewnętrzny pięciokąta foremnego wynosi 108^o. Ponieważ żadna z liczb: 252 ani 144 nie jest wielokrotnością liczby 60 lub liczby 90 więc nie da się zbudować parkietu ani z samych pięciokątów foremnych i trójkątów równobocznych, ani z samych pięciokątów foremnych i kwadratów.

Przy m=6, n może być równe 3; 4; lub 5. Mamy więc do sprawdzenia trzy pary: sześciokąty foremne i pięciokąty foremne; sześciokąty foremne i kwadraty; sześciokąty foremne i trójkąty równoboczne. W przypadku sześciokątów i trójkątów wiemy już, że odpowiedź jest pozytywna. Sprawdźmy pozostałe dwa przypadki:

Przypadek 1 (n=4)

$$k_4 \cdot 90^o + k_6 \cdot 120^o = 360^o$$

$$3k_4 + 4k_6 = 12$$

To równanie nie ma rozwiązania w dodatnich liczbach całkowitych.

Przypadek 2 (n=5)

$$k_5 \cdot 108^0 + k_6 \cdot 120^o = 360^o$$

$$9k_5 + 10k_6 = 30$$

I to równanie nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych dodatnich

Gdy m=7, wtedy jednym z wielokątów jest siedmiokąt foremny, którego kąt wewnętrzny ma rozwartość, która nie jest wartością całkowitą, bo wynosi $128\frac{4}{7}$. Podobnie ułamkowa jest różnica $360^\circ - \left(128\frac{4}{7}\right)^\circ$ i $360^\circ - \left(257\frac{1}{7}\right)^\circ$, więc żadna z tych liczb nie jest wielokrotnością liczby całkowitej.

Gdy m=8. Wewnętrzny kąt ośmiokąta foremnego ma 135°. Gdy podwoimy rozwartość tego kąta otrzymamy 270°. Łatwo wyliczyć, że do 360° brakuje 90°. Oznacza to, że parkiet da się zbudować z ośmiokątów foremnych i kwadratów, ale o tym wiemy już z poprzedniego zadania.

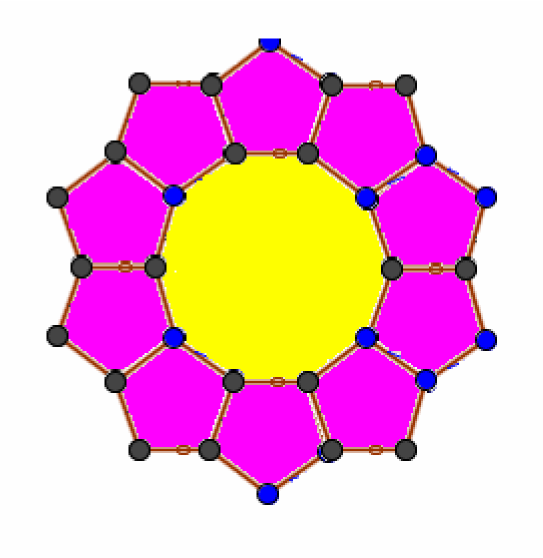
Gdy m=9. Kąt wewnętrzny dziewięciokąta foremnego ma miarę 140^0.

$360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$

Liczba 220 nie jest wielokrotnością ani 60, ani 90, ani 108. $140 \cdot 2 = 280 \quad 360 - 280 = 80$

Liczba 80 nie jest wielokrotnością liczby 60. Oznacza to, że z kombinacji: dziesięciokąt foremny i wielokąt foremny mający mniej niż dziewięć boków nie da się zbudować parkietu.

Gdy m=10. Kąt wewnętrzny dziesięciokąta foremnego ma 144°. Ponieważ, jak już wcześniej policzyliśmy, kąt wewnętrzny pięciokąta ma 108°, a $144 + 2 \cdot 108 = 360$, więc można jeden punkt na płaszczyźnie „szczelnie" otoczyć jednym dziesięciokątem foremnym i dwoma pięciokątami foremnymi, jednak parkietu pokrywającego cała płaszczyznę nie da się stworzyć.



Gdy m=11. Z tych samych powodów, z których na parkiet nie nadawały się siedmiokąty foremne, nie nadają się też jedenastokąty foremne.

Gdy m=12. Wiemy już, że para wielokątów foremnych składająca się z dwunastokątów foremnych i trójkątów równobocznych doskonale nadaje się do tworzenia parkietów.

Gdy m>12. Kąty wewnętrzne wielokątów foremnych mających więcej niż 12 boków mają rozwartość większą niż 150^o, ale mniejszą niż 180^o. Jest to więc liczba nie podzielna ani przez 60, ani przez 90.

Z uwagi na to spostrzeżenie, jak i z własności parkietów, która mówi, że w każdym węźle parkietu muszą spotykać się co najmniej trzy wielokąty, wynika, że wielokąty foremne o większej liczbie boków niż 12 nie mogą wchodzić w skład składowych żadnego parkietu.

Odpowiedź:

Na parkiety nadają się następujące pary wielokątów foremnych:

kwadraty z trójkątami równobocznymi

sześciokąty foremne z trójkątami równobocznymi

ośmiokąty foremne z kwadratami

dwunastokąty foremne z trójkątami równobocznymi

Problem 2.

Czy istnieją inne parkietarze z udziałem trzech rodzajów wielokątów foremnych?

Odpowiedź:

W tekście zadania jako przykład podano parkiet powstały na bazie trójkąta równobocznego, kwadratu i sześciokąta foremnego.

Można też tworzyć parkiety z kwadratów, sześciokątów foremnych i dwunastokątów foremnych lub trójkątów równobocznych, kwadratów i dwunastokątów foremnych. Ten ostatni będzie jednak posiadał węzły dwóch rodzajów: w jednym będą spotykać się trzy różne wielokąty, a w drugim same trójkąty równoboczne.

Oto przykłady takich parkietów: