Jacek Kredenc

Trygonometria – rozwiązanie zadania dla Czytelników

Zadanie 1. Wyznacz dokładną wartość następujących funkcji trygonometrycznych: sin 15^0; cos 15^0; tan 15^0; sin 165^0; cos 165^0 i tan 165^0.

Rozwiązanie:

$$\sin 15^o = \sin(45^o - 30^o) = \sin 45^o \cdot \cos 30^o - \cos 45^o \cdot \sin 30^o =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 15^o = \cos (45^o - 30^o) = \cos 45^o \cdot \cos 30^o + \sin 45^o \cdot \sin 30^o =$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan 15^o = \frac{\sin 15^o}{\cos 15^o} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$
$$\sin 165^o = \sin(180^o - 15^o) = \sin 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$
$$\cos 165^o = \cos(180^o - 15^o) =- \cos 15^o =- \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\tan 165^o = \tan(180^o - 15^o) =- \tan 15^o =- \left(2 - \sqrt{3}\right) = \sqrt{3} - 2$$

Zadanie 2. Wyprowadź wzory na $\sin 3\alpha$; $\cos 3\alpha$ i $\tan 3\alpha$ zakładając, że znamy wartość funkcji: a) $\sin\alpha$, b) $\tan \alpha$.

Rozwiązanie:

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin \alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \cdot \sin \alpha =$$
$$= 2\sin \alpha \cdot \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3\alpha = 3\sin \alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = \sin \alpha \left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)$$

Ostatecznie

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha \left(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right).$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cdot \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha = \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \cdot \cos \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha =$$
$$= \cos^3\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos \alpha - 2\sin^2\alpha \cdot \cos \alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cdot \cos \alpha = \cos \alpha \left(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right)$$

Ostatecznie

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha \left(\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha\right)$$

Aby obliczyć tan(3α) musimy założyć, że $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; gdzie \; k \in Z$. Wówczas

$$tan\ 3\alpha = tan(2\alpha + \alpha) = \frac{tan\ 2\alpha + tan\ \alpha}{1 - tan\ 2\alpha \cdot tan\ \alpha} = \frac{\frac{2tan\ \alpha}{1-tan^2\alpha} + tan\ \alpha}{1 - \frac{2tan\ \alpha}{1-tan^2\alpha} \cdot tan\ \alpha} = \frac{\frac{2tan\ \alpha + tan\ \alpha - tan^3\alpha}{1-tan^2\alpha}}{\frac{1-tan^2\alpha - 2tan^2\alpha}{1-tan^2\alpha}} =$$

$$= \frac{3tan\alpha - tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha}$$

Ostatecznie

$$tan\ 3\alpha = \frac{3tan\ \alpha - tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha}$$

Teraz wyznaczymy wartości funkcji dla 3α.

a) Wyznaczmy funkcję cosinus i funkcję tangens przy założeniu, że znamy wartość funkcji sinus

Aby znaleźć funkcję cosinus zastosujemy wzór jedynkowy

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$
$$cos^2\alpha = 1 - sin^2\alpha$$
$$cos\ \alpha = s \cdot \sqrt{1 - sin^2\alpha} \qquad gdzie \qquad s = 1 \quad gdy \quad \alpha \in < -\frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi > \qquad lub \qquad s = -1$$
$$gdy \quad \alpha \in < \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi >$$

Teraz wyznaczmy funkcję tangens. Jak poprzednio zakładamy, że $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \; gdzie \; k \in Z$ Wówczas

$$tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{sin\ \alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}} = \frac{sin\ \alpha \cdot s \cdot \sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha}$$

gdzie s jak wyżej

W takim razie

$$sin\ 3\alpha = sin\ \alpha\left(3cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) = sin\ \alpha\left(3\left(1 - sin^2\alpha\right) - sin^2\alpha\right) = sin\ \alpha\left(3 - 3sin^2\alpha - sin^2\alpha\right) =$$
$$= sin\ \alpha\left(3 - 4sin^2\alpha\right) = 3sin\ \alpha - 4sin^2\alpha$$

Ostatecznie

$$sin\ 3\alpha = 3sin\ \alpha - 4sin^3\alpha$$

$$cos\ 3\alpha = cos\ \alpha\left(cos^2\alpha - 3sin^2\alpha\right) =$$
$$= s \cdot \sqrt{1 - sin^2\alpha}\left(1 - sin^2\alpha - 3sin^2\alpha\right) = s \cdot \sqrt{1 - sin^2\alpha}\left(1 - 4sin^2\right)$$

Ostatecznie

$$cos\ 3\alpha = s \cdot \sqrt{1 - sin^2\alpha}\left(1 - 4sin^2\right)$$

gdzie s jak wyżej.

Oczywiście wszędzie gdzie występuje funkcja tangens obowiązuje założenie
$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ gdzie\ k \in Z$

$$tan\ 3\alpha = \frac{3tan\ \alpha - tan^3\alpha}{1-3tan^2\alpha} = \frac{3\cdot\frac{sin\ \alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha} - \left(\frac{sin\ \alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha}\right)^3}{1-3\cdot\left(\frac{sin\ \alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha}\right)^2} =$$

$$\frac{\frac{3sin\ \alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha} - \frac{sin^3\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}\left(1-sin^2\alpha\right)}{\left(1-sin^2\alpha\right)^2}}{1-3\cdot\frac{sin^2\alpha\left(1-sin^2\alpha\right)}{\left(1-sin^2\alpha\right)^2}} = \frac{\frac{3sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha} - \frac{sin^3\cdot s\cdot\alpha\sqrt{1-sin^2\alpha}}{(1-sin^2\alpha)^2}}{1-3\cdot\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}} =$$

$$\frac{\frac{3sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha} - \frac{sin^3\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha}}{\frac{1-sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha} - 3\cdot\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}} = \frac{3sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha} - \frac{sin^3\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha}}{1-sin^2\alpha-3sin^2\alpha} =$$

$$\frac{sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}\cdot\left(3-\frac{sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}\right)}{1-4sin^2\alpha} = \frac{sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}\cdot\frac{3-3sin^2\alpha-sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}}{1-4sin^2\alpha} =$$

$$\frac{sin\alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}\frac{3-4sin^2\alpha}{1-sin^2\alpha}}{1-4sin^2\alpha} = \frac{sin\ \alpha\cdot s\cdot\sqrt{1-sin^2\alpha}\cdot\left(3-4sin^2\alpha\right)}{\left(1-sin^2\alpha\right)\cdot\left(1-4sin^2\alpha\right)}$$

b) Opiszmy teraz funkcje sinus i cosinus za pomocą funkcji tangens. Zacznijmy od wzoru $tan\alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Z tego wzoru wynika, że $sin\ \alpha = tan\ \alpha \cdot cos\ \alpha$ i $cos\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{tan\ \alpha}$.
Ponieważ występuje dzielenie przez tan α musimy założyć, że $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}\ \ gdzie\ k \in Z$
Wykorzystajmy teraz wzór jedynkowy
$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
Podstawmy za sinus otrzymane powyżej wyrażenie
$tan^2\alpha \cdot cos^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
$cos^2\alpha\left(tan^2\alpha + 1\right) = 1$
$cos^2\alpha = \frac{1}{tan^2\alpha+1}$

Czyli
$cos\ \alpha = s \cdot \frac{\sqrt{tan^2\alpha+1}}{tan^2\alpha+1}$

Podobnie podstawiając do wzoru jedynkowego wyrażenie na cosinus otrzymujemy

$sin^2\alpha + \frac{sin^2\alpha}{tan^2\alpha} = 1$

$sin^2\alpha\left(1 + \frac{1}{tan^2\alpha}\right) = 1 \qquad gdy \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2} \quad gdzie\ k \in Z$

$sin^2\alpha \cdot \frac{tan^2\alpha+1}{tan^2\alpha} = 1$

$sin^2\alpha = \frac{tan^2\alpha}{tan^2\alpha+1}$

Czyli

$sin\ \alpha = \frac{tan\ \alpha \cdot s \cdot \sqrt{tan^2\alpha+1}}{tan^2\alpha+1}$

Oczywiście znaki wyrażenia po stronach prawych zależą od rozwartości kąta α
I wreszcie mamy

$$sin\ 3\alpha = sin\ \alpha\left(3cos^2\alpha - sin^2\alpha\right) = \frac{tan\ \alpha \cdot s \cdot \sqrt{tan^2\alpha+1}}{tan^2\alpha+1} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{tan^2\alpha+1} - \frac{tan^2\alpha}{tan^2\alpha+1}\right) =$$
$$= \frac{tan\ \alpha \cdot s \cdot \sqrt{tan^2\alpha+1}}{tan^2\alpha+1} \cdot \frac{3-tan^2\alpha}{tan^2\alpha+1} = \frac{tan\ \alpha \cdot s \cdot \sqrt{tan^2\alpha+1}\left(3-tan^2\alpha\right)}{\left(tan^2\alpha+1\right)^2}$$

$$cos\ 3\alpha = cos\ \alpha\left(cos^2\alpha - 3sin^2\alpha\right) = s \cdot \frac{\sqrt{tan^2\alpha+1}}{tan^2\alpha+1} \cdot \left(\frac{1}{tan^2\alpha+1} - 3 \cdot \frac{tan^2\alpha}{tan^2\alpha+1}\right) = s \cdot \frac{\sqrt{tan^2\alpha+1}\left(1-3tan^2\alpha\right)}{(tan^2\alpha+1)^2}$$

Zadanie 3. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta α wiedząc, że α jest kątem rozwartym oraz:

a) $sin\ \alpha = \frac{5}{8}$; b) $tan\ \alpha = -\frac{10}{3}$

Rozwiązanie:

a) dla $sin\ \alpha = \frac{5}{8}$

$sin^2\alpha = \frac{25}{64}$

Korzystając ze wzoru jedynkowego mamy

$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$\frac{25}{64} + cos^2\alpha = 1$

$cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{64} = \frac{39}{64}$

$cos\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{39}}{8}$

Ponieważ kąt jest rozwarty więc $cos\ \alpha = -\frac{\sqrt{39}}{8}$

$tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\frac{5}{8}}{-\frac{\sqrt{39}}{8}} = -\frac{5\sqrt{39}}{39}$

b) dla $tan\ \alpha = -\frac{10}{3}$

$tan\ \alpha = \frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha}$, więc $\frac{sin\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{-10}{3}$
$sin\ \alpha = -\frac{10}{3} cos\ \alpha$

Otrzymane wyrażenie po prawej stronie wstawmy do wzoru jedynkowego

$\frac{100}{9} cos^2 \alpha + cos^2 \alpha = 1$
$\frac{109}{9} cos^2 \alpha = 1$
$cos^2 \alpha = \frac{9}{109}$
$cos\ \alpha = \pm \frac{3\sqrt{109}}{109}$

Ponieważ kąt α jest rozwarty więc
$cos\ \alpha = -\frac{3\sqrt{109}}{109}$

Wyznaczmy jeszcze ze wzoru jedynkowego funkcję sinus
$sin^2 \alpha + \frac{9}{109} = 1$
$sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{109} = \frac{100}{109}$

Ostatecznie $sin\ \alpha = \frac{10\sqrt{109}}{109}$