

Trenerski wybór – rozwiązanie zadania dla Czytelników

Zadanie:

W pewnym klubie piłki nożnej uprawnionych do gry w barwach tego klubu jest 19 zawodników: 3 bramkarzy, 7 obrońców, 5 pomocników i 4 napastników. Obliczyć na ile sposobów można wybrać 11 zawodników do podstawowego składu drużyny tego klubu, jeśli wiadomo, że trener zdecydował, że drużyna rozpocznie mecz w ustawieniu:

- 3 – 4 – 3 (trzech obrońców, czterech pomocników i trzech napastników),
- 4 – 3 – 3 (czterech obrońców, trzech pomocników i trzech napastników),
- 4 – 4 – 2 (czterech obrońców, czterech pomocników i dwóch napastników),
- 5 – 4 – 1 (pięciu obrońców, czterech pomocników i jeden napastnik).

a – Rozwiązanie:

Wykorzystamy regułę iloczynu („Świat Matematyki” nr 34). Wybór 11 zawodników do podstawowego składu drużyny trener może przeprowadzić w czterech krokach.

Krok pierwszy:

Trener wybiera bramkarza. Jednego bramkarza spośród trzech trener może wybrać na

$$C_3 = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! * (3-1)!} = \frac{3!}{1! * 2!} = \frac{3 * 2 * 1}{1 * 2 * 1} = 3 \text{ sposoby („Świat Matematyki” nr 35).}$$

Krok drugi:

Trener wybiera trzech obrońców. Trzech obrońców spośród siedmiu trener może wybrać na

$$C_7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! * (7-3)!} = \frac{7!}{3! * 4!} = \frac{7 * 6 * 5 * 4!}{3! * 4!} = \frac{7 * 6 * 5}{3!} =$$

$$= \frac{7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} = 7 * 5 = 35 \text{ sposobów.}$$

Krok trzeci:

Trener wybiera czterech pomocników. Czterech pomocników spośród pięciu trener może wybrać na

$$C_5^4 = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4! * (5-4)!} = \frac{5!}{4! * 1!} = \frac{5 * 4!}{4! * 1} = 5 \text{ sposobów.}$$

Krok czwarty:

Trener wybiera trzech napastników. Trzech napastników spośród czterech trener może wybrać na

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! * (4-3)!} = \frac{4!}{3! * 1!} = \frac{4 * 3!}{3! * 1} = 4 \text{ sposoby.}$$

Z reguły iloczynu mamy: $3 * 35 * 5 * 4 = 2100$.

a – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 2100 sposobów.

b – Rozwiązanie:

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$\begin{aligned} C_3^1 * C_7^4 * C_5^3 * C_4^3 &= \binom{3}{1} * \binom{7}{4} * \binom{5}{3} * \binom{4}{3} = \\ &= \frac{3!}{1! * (3-1)!} * \frac{7!}{4! * (7-4)!} * \frac{5!}{3! * (5-3)!} * \frac{4!}{3! * (4-3)!} = \\ &= \frac{3!}{1! * 2!} * \frac{7!}{4! * 3!} * \frac{5!}{3! * 2!} * \frac{4!}{3! * 1!} = \\ &= \frac{3 * 2!}{1! * 2!} * \frac{7 * 6 * 5 * 4!}{4! * 3!} * \frac{5 * 4 * 3!}{3! * 2!} * \frac{4 * 3!}{3! * 1!} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{1!} * \frac{7 * 6 * 5}{3!} * \frac{5 * 4}{2!} * \frac{4}{1!} =$$

$$= \frac{3}{1} * \frac{7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} * \frac{5 * 4}{2 * 1} * \frac{4}{1} = 3 * (7 * 5) * (5 * 2) * 4 = 3 * 35 * 10 * 4 =$$

$$= 3 * 10 * (35 * 4) = 30 * 140 = 4200.$$

b – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 4200 sposobów.

c – Rozwiązanie:

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$C_3^1 * C_7^4 * C_5^4 * C_4^2 = \binom{3}{1} * \binom{7}{4} * \binom{5}{4} * \binom{4}{2} =$$

$$= \frac{3!}{1! * (3-1)!} * \frac{7!}{4! * (7-4)!} * \frac{5!}{4! * (5-4)!} * \frac{4!}{2! * (4-2)!} =$$

$$= \frac{3!}{1! * 2!} * \frac{7!}{4! * 3!} * \frac{5!}{4! * 1!} * \frac{4!}{2! * 2!} =$$

$$= \frac{3 * 2!}{1! * 2!} * \frac{7 * 6 * 5 * 4!}{4! * 3!} * \frac{5 * 4!}{4! * 1!} * \frac{4 * 3 * 2!}{2! * 2!} =$$

$$= \frac{3}{1!} * \frac{7 * 6 * 5}{3!} * \frac{5}{1} * \frac{4 * 3}{2!} =$$

$$= \frac{3}{1} * \frac{7 * 6 * 5}{3 * 2 * 1} * \frac{5}{1} * \frac{4}{2 * 1} = 3 * (7 * 5) * 5 * 2 = 3 * 35 * 5 * 2 =$$

$$= (3 * 35) * (5 * 2) = 105 * 10 = 1050.$$

c – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 1050 sposobów.

d – Rozwiązanie:

Przeprowadzając takie samo rozumowanie jak w punkcie a otrzymujemy:

$$C_3^1 * C_7^5 * C_5^4 * C_4^1 = \binom{3}{1} * \binom{7}{5} * \binom{5}{4} * \binom{4}{1} =$$

$$= \frac{3!}{1! * (3-1)!} * \frac{7!}{5! * (7-5)!} * \frac{5!}{4! * (5-4)!} * \frac{4!}{1! * (4-1)!} =$$

$$= \frac{3!}{1! * 2!} * \frac{7!}{5! * 2!} * \frac{5!}{4! * 1!} * \frac{4!}{1! * 3!} =$$

$$= \frac{3 * 2!}{1! * 2!} * \frac{7 * 6 * 5!}{5! * 2!} * \frac{5 * 4!}{4! * 1!} * \frac{4 * 3!}{1! * 3!} =$$

$$= \frac{3}{1!} * \frac{7 * 6}{2!} * \frac{5}{1} * \frac{4}{1} =$$

$$= \frac{3}{1} * \frac{7 * 6}{2 * 1} * \frac{5}{1} * \frac{4}{1} = 3 * (7 * 3) * 5 * 4 = 3 * 21 * 20 = 63 * 20 = 1260.$$

d – Odpowiedź: Trener może wybrać podstawowy skład drużyny na 1260 sposobów.