

Marian Maciocha

Cztery lokaty

Zadanie „Którą lokatę wybrać ?”

Chcemy ulokować 1000 zł na cztery miesiące i mamy do wyboru cztery propozycje:

Propozycja 1:

Lokata z oprocentowaniem 4% w skali roku. Odsetki są naliczane na zakończenie czteromiesięcznego okresu oszczędzania.

Propozycja 2:

Lokata z oprocentowaniem 3,8% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co miesiąc.

Propozycja 3:

Przez pierwsze trzy miesiące oprocentowanie wynosi 1% w skali roku. W czwartym miesiącu oprocentowanie wynosi 12% w skali roku. Odsetki są naliczane na zakończenie czteromiesięcznego okresu oszczędzania.

Propozycja 4:

Przez pierwsze trzy miesiące oprocentowanie wynosi 1% w skali roku. W czwartym miesiącu oprocentowanie wynosi 12% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co miesiąc.

Uwaga:

Po naliczeniu odsetek bank automatycznie odprowadza podatek w wysokości 19%.

Rozwiązanie:

Propozycja 1: Lokata „1000 zł na cztery miesiące” z oprocentowaniem 4% w skali roku.

Naliczone odsetki po czterech miesiącach:

$$1000 \text{ zł} \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{100} = \frac{40}{3} \text{ zł}$$

Po naliczeniu odsetek bank automatycznie odprowadza podatek w wysokości 19%, czyli bank zostawia nam 81% naliczonych odsetek, czyli po czterech miesiącach oprócz kapitału początkowego (1000zł) otrzymujemy dodatkowo:

$$\frac{40}{3} \text{ zł} \cdot \frac{81}{100} = \frac{4}{1} \cdot \frac{27}{10} \text{ zł} = 10,80 \text{ zł}$$

W_1 – końcowa wartość lokaty, według propozycji 1, wynosi: $W_1 = 1000\text{zł} + 10,80\text{zł}$

$W_1 = 1010,80\text{zł}$

Propozycja 2: Lokata z oprocentowaniem 3,8% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co miesiąc.

Rozważmy trzy sposoby naliczenia odsetek przez bank i odprowadzania 19 procentowego podatku:

Sposób I: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek z nieskończone wielką dokładnością, a zaokrąglenie do pełnego grosza bank dokonuje na zakończenie lokaty.

Niech $W_{2,I}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 2, dla I sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Sposób II: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek co miesiąc z zaokrągleniem do pełnego grosza.

Niech $W_{2,II}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 2, dla II sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Sposób III: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek co miesiąc z zaokrągleniem do pełnych dziesiątek groszy.

Niech $W_{2,III}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 2, dla III sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Pytanie:

Jaka jest różnica między końcowymi wartościami lokat $W_{2,I}$, $W_{2,II}$ i $W_{2,III}$?

Obliczamy $W_{2,I}$:

$$W_{2,I} = 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right)^4 \approx 1010,29954 \text{ zł} \approx 1010,30 \text{ zł}$$

Zatem $W_{2,I} = 1010,30 \text{ zł}$.

Obliczamy $W_{2,II}$:

Po upływie pierwszego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,002565 = 1002,565 \text{ zł} \approx 1002,57 \text{ zł}$$

Po upływie drugiego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1002,57 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1002,57 \text{ zł} \cdot 1,002565 = 1005,14159205 \approx 1005,14 \text{ zł}$$

Po upływie trzeciego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1005,14 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1005,14 \cdot 1,002565 = 1007,7181841 \text{ zł} \approx 1007,72 \text{ zł}$$

Po upływie czwartego miesiąca końcowa wartość lokaty wynosi:

$$1007,72 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1007,72 \text{ zł} \cdot 1,002565 = 1010,289686 \text{ zł}$$

$\approx 1010,29$ zł

Zatem $W_{2,II} = 1010,29$ zł.

Obliczamy $W_{2,III}$:

Po upływie pierwszego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,002565 = 1002,565 \text{ zł} \approx 1002,60 \text{ zł}$$

Po upływie drugiego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1002,60 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1002,60 \cdot 1,002565 = 1005,171669 \text{ zł} \approx 1005,20 \text{ zł}$$

Po upływie trzeciego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1005,20 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1005,20 \text{ zł} \cdot 1,002565 = 1007,778338 \text{ zł} \approx 1007,70 \text{ zł}$$

$\approx 1007,70$ zł

Po upływie czwartego miesiąca końcowa wartość lokaty wynosi:

$$1007,70 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{3,8}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1007,70 \cdot 1,002565 = 1010,2847505 \text{ zł}$$

$\approx 1010,30$ zł

Zatem $W_{2,III} = 1010,30$ zł.

Odpowiedź: $W_{2,I} = 1010,30$ zł; $W_{2,II} = 1010,29$ zł; $W_{2,III} = 1010,30$ zł.

Propozycja 3: Przez pierwsze trzy miesiące oprocentowanie wynosi 1% w skali roku. W czwartym miesiącu oprocentowanie wynosi 12% w skali roku. Odsetki są naliczane na zakończenie czteromiesięcznego okresu oszczędzania.

W_3 – końcowa wartość lokaty, według propozycji 3.

$$\begin{aligned} W_3 &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100} + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \left(\frac{3}{12} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100}\right) \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{100}\right) \cdot \frac{81}{100}\right) \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{400} + \frac{4}{400}\right) \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{5}{400} \cdot \frac{81}{100}\right) = \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{80} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{81}{8000}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,010125 = 1010,125 \text{ zł} \\ &\approx 1010,13 \text{ zł} \end{aligned}$$

$W_3 = 1010,12$ zł

Propozycja 4: Przez pierwsze trzy miesiące oprocentowanie wynosi 1% w skali roku. W czwartym miesiącu oprocentowanie wynosi 12% w skali roku. Odsetki są kapitalizowane co miesiąc.

Rozważmy trzy sposoby naliczenia odsetek przez bank i odprowadzania 19 procentowego podatku:

Sposób I: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek z nieskończenie wielką dokładnością, a zaokrąglenie do pełnego grosza bank dokonuje na zakończenie lokaty.

Niech $W_{4,I}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 4, dla I sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Sposób II: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek co miesiąc z zaokrągleniem do pełnego grosza.

Niech $W_{4,II}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 4, dla II sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Sposób III: bank nalicza odsetki i odprowadza podatek co miesiąc z zaokrągleniem do pełnych dziesiątek groszy.

Niech $W_{4,III}$ – końcowa wartość lokaty, według propozycji 4, dla III sposobu naliczania odsetek i odprowadzania podatku.

Pytanie:

Jaka jest różnica między końcowymi wartościami lokat $W_{4,I}$, $W_{4,II}$ i $W_{4,III}$?

Obliczamy $W_{4,I}$:

$$\begin{aligned}W_{4,I} &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{27}{100}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = \\ &= 1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{27}{40000}\right)^3 \cdot \left(1 + \frac{81}{10000}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,000675^3 \cdot 1,0081 \approx \\ &\approx 1010,14278 \text{ zł} \approx 1010,14\end{aligned}$$

Zatem $W_{4,I} = 1010,14 \text{ zł}$.

Obliczamy $W_{4,II}$:

Po upływie pierwszego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1000,675 \text{ zł} \approx 1000,68 \text{ zł}$$

Po upływie drugiego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$\begin{aligned}1000,68 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) &= 1000,68 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1001,355459 \text{ zł} \approx \\ &\approx 1001,36 \text{ zł}\end{aligned}$$

Po upływie trzeciego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$\begin{aligned}1001,36 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) &= 1001,36 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1002,035918 \text{ zł} \approx \\ &\approx 1002,04 \text{ zł}\end{aligned}$$

Po upływie czwartego miesiąca końcowa wartość lokaty wynosi:

$$1002,04 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1002,04 \text{ zł} \cdot 1,0081 = 1010,156524 \text{ zł} \approx 1010,16 \text{ zł}$$

Zatem $W_{4,II} = 1010,16\text{zł}$.

Obliczamy $W_{4,III}$:

Po upływie pierwszego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1000 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1000,675 \text{ zł} \approx 1000,70 \text{ zł}$$

Po upływie drugiego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1000,70 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1000,70 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1001,3754725 \text{ zł} \approx 1001,40 \text{ zł}$$

Po upływie trzeciego miesiąca wartość lokaty wynosi:

$$1001,40 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1001,40 \text{ zł} \cdot 1,000675 = 1002,075945 \text{ zł} \approx 1002,1 \text{ zł}$$

Po upływie czwartego miesiąca końcowa wartość lokaty wynosi:

$$1002,1 \text{ zł} \cdot \left(1 + \frac{1}{12} \cdot \frac{12}{100} \cdot \frac{81}{100}\right) = 1002,1 \text{ zł} \cdot 1,0081 = 1010,21701 \text{ zł} \approx 1010,20 \text{ zł}$$

Zatem $W_{4,III} = 1010,2\text{zł}$.

Odpowiedź: $W_{4,I} = 1010,14\text{zł}$; $W_{4,II} = 1010,16\text{zł}$; $W_{4,III} = 1010,20\text{zł}$.