ŚWIAT MATEMATYKI

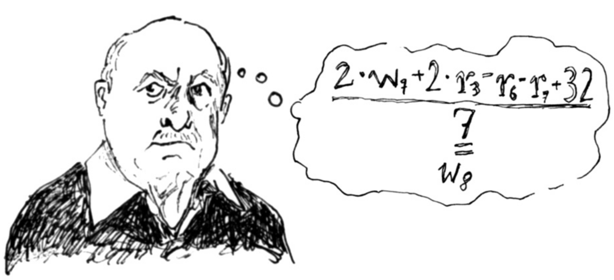
DODATEK SPECJALNY NR 26

Rozwiązanie zadania konkursowego na długość cyklu Wielkanocnego w kalendarzu gregoriańskim

Drodzy Czytelnicy

Przedstawiamy proste rozwiązanie naszego zadania konkursowego, z którym sporo czytelników sobie nie poradziło. Rozwiązanie przedstawiamy algebraicznie oraz numerycznie – w języku LOGO – zamieszczone w 30. numerze „Świata Matematyki".

Zachęcamy do zapoznania się z 30., numerem Świata Matematyki. Znajdziecie w nim informacje, o których uczniowie podczas roku szkolnego nie usłyszą. Podczas wakacji warto robić rzeczy niemożliwe, by z rozbłyskiem wejść w nowy rok szkolny.



ŚWIAT MATEMATYKI
periodyk popularnonaukowy

SPIS TREŚCI

Redakcja:
redaktor naczelny – Jacek Orzechowski
autorzy artykułów i zadań – Marian Maciocha, Jacek Kredenc, Michał Kremzer
zespół redakcyjny – Leszek Skorupa, Tomasz Kuźlik
korekta merytoryczna – Jacek Kredenc
grafika, ilustracje – Antoni Chara
korekta – Barbara Inglot

Wydawca:
Mediacom sp. z o.o., ul. Jeziorowa 27, 51-252 Wrocław
biuro@swiatmatematyki.pl

Druk:
„UNIQPOLIMEDIA", ul. Kwidzyńska 6E, 51-416 Wrocław

Skąd pomysł, że *M* = 5700000?

czyli kulisy rozwiązania problemu „Długość cyklu Wielkanocnego w kalendarzu gregoriańskim”

Mieliśmy znaleźć najmniejszą (dodatnią) liczbę naturalną M taką, że ***dla każdej liczby naturalnej*** n *większej od 1582 spełniony jest warunek:*

„Miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku n są takie same jak miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku $(n + M)$.*”*

Zatem chcielibyśmy znaleźć taką najmniejszą (dodatnią) liczbę naturalną M*, żeby wynik dziesiątego dzielenia w algorytmie Jeana Meeusa był taki sam dla roku* n *jak i dla roku* $(n + M)$ ***niezależnie od roku*** n*. Przyjmijmy, że wyniki dziesięciu dzieleń w algorytmie Jeana Meeusa dla roku n stanowią pewien wzorzec. Dla roku* $(n + M)$ *chcielibyśmy uzyskać taki sam wynik dziesiątego dzielenia jak dla roku* n*.*

Liczbę M *spróbujemy znaleźć w kilku kolejnych próbach. Dzielenia dla roku* n *będą przedstawione w lewej kolumnie lub oznaczone kolejnym numerem dzielenia na polu szarym, a dzielenia dla roku* $(n + M)$ *będą przedstawione w prawej kolumnie lub oznaczone kolejnym numerem dzielenia na polu białym.*

Na początek przypomnijmy sobie algorytm Jeana Meeusa do wyznaczania dnia Wielkanocy, w ***kalendarzu gregoriańskim****. dla roku* n *większego od* 1582*.*

Dzielenie 1: $\frac{n}{19} = w_1$ reszta r_1.

Dzielenie 2: $\frac{n}{100} = w_2$ reszta r_2.

Dzielenie 3: $\frac{w_2}{4} = w_3$ reszta r_3.

Dzielenie 4: $\frac{w_2 + 8}{25} = w_4$ reszta r_4.

Dzielenie 5: $\frac{w_2 - w_4 + 1}{3} = w_5$ reszta r_5.

Dzielenie 6: $\frac{w_2 - w_3 - w_5 + 19 \cdot r_1 + 15}{30} = w_6$ reszta r_6.

Dzielenie 7: $\frac{r_2}{4} = w_7$ reszta r_7.

Dzielenie 8: $\frac{2 \cdot w_7 + 2 \cdot r_3 - r_6 - r_7 + 32}{7} = w_8$ reszta r_8.

Dzielenie 9: $\frac{r_1 + 11 \cdot r_6 + 22 \cdot r_8}{451} = w_9$ reszta r_9.

Dzielenie 10: $\frac{-7 \cdot w_9 + r_6 + r_8 + 114}{31} = w_{10}$ reszta r_{10}.

Niedziela Wielkanocna w roku n wypada dnia $(r_{10} + 1)$ miesiąca w_{10}.

PRÓBA 1

Najpierw znajdźmy taką liczbę M_1, że reszta z pierwszego dzielenia dla roku n będzie równa reszcie z pierwszego dzielenia dla roku $(n + M_1)$. Ponieważ pierwsze dzielenie jest dzieleniem przez 19, to przyjmijmy, że $M_1 = 19$. Zobaczmy jak będzie wyglądał wynik algorytmu Jeana Meeusa dla $M = M_1 = 19$.

Dzielenie 1:	$\frac{n}{19} = w_1$ reszta r_1	$\frac{n+19}{19} = \frac{n}{19} + \frac{19}{19} = w_1 + 1$ reszta r_1
Dzielenie 2:	$\frac{n}{100} = w_2$ reszta r_2	$\frac{n+19}{100} =$

Wynik pierwszego dzielenia dla roku $(n + M)$ zależy tylko od wyniku pierwszego dzielenia dla roku n. Problem jest z drugim dzieleniem dla roku $(n + M)$.

PRÓBA 2

Drugie dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa jest dzieleniem przez 100. Zobaczmy zatem, jak będą wyglądały pierwsze, drugie i trzecie dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa dla $M = M_2 = 19 \cdot 100$.

Dzielenie 1:	$\frac{n}{19} = w_1$ reszta r_1	$\frac{n+19 \cdot 100}{19} = \frac{n}{19} + \frac{19 \cdot 100}{19} = w_1 + 100$ reszta r_1
Dzielenie 2:	$\frac{n}{100} = w_2$ reszta r_2	$\frac{n+19 \cdot 100}{100} = \frac{n}{100} + \frac{19 \cdot 100}{100} = w_2 + 19$ reszta r_2
Dzielenie 3:	$\frac{w_2}{4} = w_3$ reszta r_3	$\frac{w_2+19}{4} =$

Wyniki pierwszego i drugiego dzielenia dla roku $(n + M)$ zależą tylko od wyników pierwszego i drugiego dzielenia dla roku n. Problem jest z trzecim dzieleniem dla roku $(n + M)$.

PRÓBA 3

Trzecie dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa jest dzieleniem przez 4. Zobaczmy jak będą wyglądały kolejne dzielenia w algorytmie Jeana Meeusa dla $M = M_3 = 19 \cdot 100 \cdot 4$.

Dzielenie 1:	$\frac{n}{19} = w_1$ reszta r_1	$\frac{n+19 \cdot 100 \cdot 4}{19} = \frac{n}{19} + \frac{19 \cdot 100 \cdot 4}{19} = w_1 + 100 \cdot 4$ reszta r_1
Dzielenie 2:	$\frac{n}{100} = w_2$ reszta r_2	$\frac{n+19 \cdot 100 \cdot 4}{100} = \frac{n}{100} + \frac{19 \cdot 100 \cdot 4}{100} = w_2 + 19 \cdot 4$ reszta r_2
Dzielenie 3:	$\frac{w_2}{4} = w_3$ reszta r_3	$\frac{w_2+19 \cdot 4}{4} = \frac{w_2}{4} + \frac{19 \cdot 4}{4} = w_3 + 19$ reszta r_3
Dzielenie 4:	$\frac{w_2+8}{25} = w_4$ reszta r_4	$\frac{(w_2+19 \cdot 4)+8}{25} =$

Wyniki pierwszego, drugiego i trzeciego dzielenia dla roku $(n + M)$ zależą tylko od wyników pierwszego, drugiego i trzeciego dzielenia dla roku n. Problem jest z czwartym dzieleniem.

PRÓBA 4

Czwarte dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa jest dzieleniem przez 25. Zobaczmy jak będą wyglądały pierwsze, drugie, trzecie, czwarte i piąte dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa dla $M = M_4 = 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25$.

1 $\quad \dfrac{n}{19} = w_1$ reszta $\boldsymbol{r_1}$.

2 $\quad \dfrac{n}{100} = \boldsymbol{w_2}$ reszta $\boldsymbol{r_2}$.

3 $\quad \dfrac{w_2}{4} = \boldsymbol{w_3}$ reszta $\boldsymbol{r_3}$.

4 $\quad \dfrac{w_2 + 8}{25} = \boldsymbol{w_4}$ reszta r_4.

5 $\quad \dfrac{w_2 - w_4 + 1}{3} = \boldsymbol{w_5}$ reszta r_5.

1 $\quad \dfrac{n + 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25}{19} = \dfrac{n}{19} + \dfrac{19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25}{19} = w_1 + 100 \cdot 4 \cdot 25$ reszta r_1

2 $\quad \dfrac{n + 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25}{100} = \dfrac{n}{100} + \dfrac{19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25}{100} = w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25$ reszta r_2

3 $\quad \dfrac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25}{4} = \dfrac{w_2}{4} + \dfrac{19 \cdot 4 \cdot 25}{4} = w_3 + 19 \cdot 25$ reszta r_3

4 $\quad \dfrac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 + 8}{25} = \dfrac{w_2 + 8}{25} + \dfrac{19 \cdot 4 \cdot 25}{25} = w_4 + 19 \cdot 4$ reszta r_4

5 $\quad \dfrac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - (w_4 + 19 \cdot 4) + 1}{3} = \dfrac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - w_4 - 19 \cdot 4 + 1}{3} =$

$= \dfrac{w_2 - w_4 + 1}{3} + \dfrac{19 \cdot 4 \cdot (25 - 1)}{3} = w_5 + 19 \cdot 4 \cdot 8$ reszta r_5

Wyniki pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego dzielenia dla roku $(n + M)$ zależą tylko od wyników pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego dzielenia dla roku n. Sprawdźmy szóste dzielenie.

6 $\quad \dfrac{w_2 - w_3 - w_5 + 19 \cdot r_1 + 15}{30} = w_6$ reszta $\boldsymbol{r_6}$.

6 $\quad \dfrac{(w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25) - (w_3 + 19 \cdot 25) - (w_5 + 19 \cdot 4 \cdot 8) + 19r_1 + 15}{30} =$

$= \dfrac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - w_3 - 19 \cdot 25 - w_5 - 19 \cdot 4 \cdot 8 + 19r_1 + 15}{30} =$

$= \dfrac{w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - 19 \cdot 25 - 19 \cdot 4 \cdot 8}{30} =$

$= \dfrac{w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - 19 \cdot 25 - 19 \cdot 4 \cdot 8}{30} =$

$= \dfrac{(w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15) + 19 \cdot 43}{30}$

Wyniki pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego dzielenia dla roku (n + M) zależą tylko od wyników pierwszego, drugiego, trzeciego, czwartego i piątego dzielenia dla roku n. Problem jest z szóstym dzieleniem.

PRÓBA 5

Szóste dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa jest dzieleniem przez 30. Zobaczmy jak będą wyglądały pierwsze, drugie, trzecie, czwarte i piąte dzielenie w algorytmie Jeana Meeusa dla $M = M_5 = 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30$:

1. $\frac{n}{19} = w_1$ reszta $\boldsymbol{r_1}$.

2. $\frac{n}{100} = \boldsymbol{w_2}$ reszta $\boldsymbol{r_2}$.

3. $\frac{w_2}{4} = \boldsymbol{w_3}$ reszta $\boldsymbol{r_3}$.

4. $\frac{w_2 + 8}{25} = \boldsymbol{w_4}$ reszta r_4.

5. $\frac{w_2 - w_4 + 1}{3} = \boldsymbol{w_5}$ reszta r_5.

6. $\frac{w_2 - w_3 - w_5 + 19 \cdot r_1 + 15}{30} = w_6$ reszta $\boldsymbol{r_6}$.

1. $\frac{n + 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{19} = \frac{n}{19} + \frac{19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{19} = w_1 + 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30$ reszta r_1

2. $\frac{n + 19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{100} = \frac{n}{100} + \frac{19 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{100} = w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30$ reszta r_2

3. $\frac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{4} = \frac{w_2}{4} + \frac{19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{4} = w_3 + 19 \cdot 25 \cdot 30$ reszta r_3

4. $\frac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 + 8}{25} = \frac{w_2 + 8}{25} + \frac{19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30}{25} = w_4 + 19 \cdot 4 \cdot 30$ reszta r_4

5. $$\frac{(w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30) - (w_4 + 19 \cdot 4 \cdot 30) + 1}{3} = \frac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 - w_4 - 19 \cdot 4 \cdot 30 + 1}{3} =$$
$$= \frac{w_2 - w_4 + 1 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 - 19 \cdot 4 \cdot 30}{3} = \frac{w_2 - w_4 + 1}{3} + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 10 - 19 \cdot 4 \cdot 10 =$$
$= w_5 + 19 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 10$ reszta r_5

6. $$\frac{(w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30) - (w_3 + 19 \cdot 25 \cdot 30) - (w_5 + 19 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 10) + 19r_1 + 15}{30} =$$
$$\frac{w_2 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 - w_3 - 19 \cdot 25 \cdot 30 - w_5 - 19 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 10 + 19r_1 + 15}{30} =$$
$$= \frac{w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15 + 19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 - 19 \cdot 25 \cdot 30 - 19 \cdot 4 \cdot 24 \cdot 10}{30} =$$
$$= \frac{w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15}{30} + \frac{19 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 30 - 19 \cdot 25 \cdot 30 - 19 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10}{30} =$$
$$= \frac{w_2 - w_3 - w_5 + 19r_1 + 15}{30} + 19 \cdot 4 \cdot 25 - 19 \cdot 25 - 19 \cdot 4 \cdot 8 =$$
$= w_6 + 19 \cdot 4 \cdot 25 - 19 \cdot 25 - 19 \cdot 4 \cdot 8$ reszta r_6

Sprawdźmy teraz dzielenia siódme, ósme, dziewiąte i dziesiąte:

7 $\frac{r_2}{4} = w_7$ reszta r_7.

8 $\frac{2 \cdot w_7 + 2 \cdot r_3 - r_6 - r_7 + 32}{7} = w_8$ reszta r_8.

9 $\frac{r_1 + 11 \cdot r_6 + 22 \cdot r_8}{451} = w_9$ reszta r_9.

10 $\frac{-7 \cdot w_9 + r_6 + r_8 + 114}{31} = w_{10}$ reszta r_{10}.

7 $\frac{r_2}{4} = w_7$ reszta r_7

8 $\frac{2w_7 + 2r_3 - r_6 - r_7 + 32}{7} = w_8$ reszta r_8

9 $\frac{r_1 + 11r_6 + 22r_8}{451} = w_9$ reszta r_9

10 $\frac{-7w_9 + r_6 + r_8 + 144}{31} = w_{10}$ reszta r_{10}

Niedziela Wielkanocna w roku $(n + M)$ wypada dnia $(r_{10} + 1)$ miesiąca w_{10}.

Dla każdej liczby naturalnej n $(n > 1582)$ spełniony jest warunek (dla kalendarza gregoriańskiego): „Miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku n są takie same jak miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku $(n + 5700000)$". Numerycznie zostało sprawdzone, że nie istnieje taka liczba naturalna m, że $1 \leqslant m < 5700000$, by spełniony był warunek: „Miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku n są takie same jak miesiąc i dzień miesiąca Wielkanocy w roku $(n + m)$".

Marian Maciocha