Odpowiedzi dla przykładowego zestawu zadań egzaminu maturalnego *z* ***matematyki – poziom rozszerzony****,* *zamieszczonego w Świecie Matematyki nr 65.*

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

1. D 2.C 3. A 4. D 5. B

Szkice rozwiązań zadań otwartych

Zadanie 6.

Mamy $b=4-a$. Stąd:

$$a^3+b^3=a^3+(4-a)^3=a^3+(4^3-3\cdot 4^2a+3\cdot 4a^2-a^3)=a^3+64-48a+12a^2-a^3=64-48a+12a^2.$$

Zatem:

$$a^3+b^3-16=48-48a+12a^2=12(4-4a+a^2)=12(2-a)^2\geqslant 0.$$

Wobec tego $a^3+b^3\geqslant 16$, a to mieliśmy udowodnić.

Zadanie 7.

Mamy $k^3+3k^2+2k=k(k^2+3k+2)=k(k+1)(k+2)$.

Jedna z liczb: k lub $k+1$ jest parzysta oraz jedna z liczb: k, $k+1$ lub $k+2$ jest podzielna przez 3. Zatem rozważana liczba jest podzielna przez $2\cdot 3=6$.

Zadanie 8.

Lewa strona podanej nierówności jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q=\frac{-x}{2}$. Aby ten szereg był zbieżny, musi być spełniona nierówność $|q|<1$, czyli $\left|\frac{-x}{2}\right|<1$. Stąd $x\in(-2;2)$, (dlaczego?).

Mamy sumę lewej strony nierówności dla $a_1=x$:

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{x}{1-\left(\frac{-x}{2}\right)}=\frac{x}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2x}{2+x}.$$

Rozwiązujemy nierówność:

$$\frac{2x}{2+x}\geqslant\frac{2}{3}x \quad \text{(!) (założenie)}$$

$$2x\geqslant\frac{2}{3}x(2+x) \quad \Big/\cdot 3,$$

$$6x\geqslant 4x+2x^2,$$

$$-2x^2+2x\geqslant 0,$$

$$-x^2+x\geqslant 0.$$

Po rozwiązaniu powyższej nierówności kwadratowej otrzymujemy $x\in\langle 0;1\rangle$. Stąd i z założenia otrzymujemy odpowiedź: $x\in\langle 0;1\rangle$.

Zadanie 9.

Mamy kolejno:

$$\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x,$$
$$\sin^2 4x=\sin^2 6x-\sin^2 2x,$$
$$\sin^2 4x=(\sin 6x-\sin 2x)\ (\sin 6x+\sin 2x),$$
$$\sin^2 4x=(2\sin 2x\cos 4x)\ (2\sin 4x\cos 2x),$$
$$\sin^2 4x=(2\sin 2x\cos 2x)(2\sin 4x\cos 4x),$$
$$\sin^2 4x=\sin 4x\sin 8x,$$
$$\sin 4x\cdot(\sin 4x-\sin 8x)=0,$$
$$\sin 4x\cdot(2\sin(-2x))\cos 6x=0,\qquad /:2$$
$$-\sin 4x\ \sin 2x\ \cos 6x=0.$$

Stąd: $\sin 4x=0$ lub $\sin 2x=0$ lub $\cos 6x=0.$

Zatem: $4x=k\pi$ lub $2x=k\pi$ lub $6x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (gdzie k jest liczbą całkowitą).

Stąd: $x=k\cdot\frac{\pi}{4}$ lub $x=k\cdot\frac{\pi}{2}$ lub $x=\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{6}.$

Zadanie 10.

Oznaczmy $f(x)=2x^2$ dla $x\in R$.

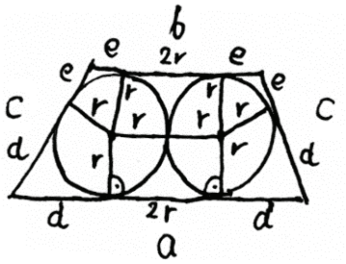
Jak wiadomo, równanie stycznej do wykresu funkcji różniczkowalnej w punkcie $A(x_0;\ f(x_0))$ jest postaci:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Ponieważ $f'(x)=(2x^2)'=4x$ i $x_0=1$, to:

$$y=4(x-1)+2=4x-2.$$

Zadanie 11.



Na podstawie rysunku:

$$a=d+2r+d,\ \ b=e+2r+e,\ \ c=d+e.$$

Stąd:

$$a+b=2d+2e+4r.$$

W konsekwencji:

$$a+b=2c+4r.$$

Zatem:

$$r=\frac{a+b-2c}{4}.$$

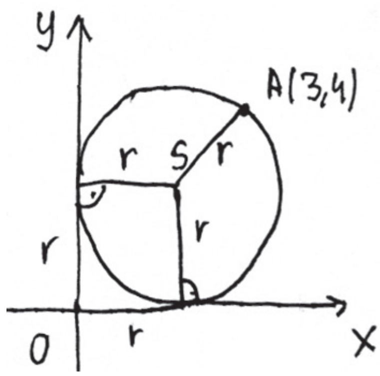
Zadanie 12.

Mamy: $\Omega=\{(i,j,k): i,j,k=1,2,3,4,5,6\}$. Stąd: $\overline{\overline{\Omega}}=6\cdot 6\cdot 6=216$. Niech A oznacza zdarzenie, o które chodzi w treści zadania. Wtedy: $A'=\{(1,1,1);(1,1,2);(1,2,1);(2,1,1)\}$. Stąd: $P(A')=\frac{4}{216}=\frac{1}{54}$.

Zatem: $P(A)=1-P(A')=1-\frac{1}{54}=\frac{53}{54}$.

Zadanie 13.

Ponieważ punkt $A(3;\,4)$ należy do pierwszej ćwiartki układu współrzędnych, to mamy następujący rysunek:



r – promień okręgu
S – środek okręgu

rys. 2

Ogólne równanie okręgu o środku $S(a;\,b)$ i promieniu r jest postaci:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

W naszym przypadku $a=r$ i $b=r$. Zatem mamy równanie:

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2.$$

Skoro okrąg przechodzi przez punkt $A(3;\,4)$, to:

$$(3-r)^2+(4-r)^2=r^2.$$

Przekształcamy powyższe równanie:

$$9-6r+r^2+16-8r+r^2=r^2.$$

Stąd:

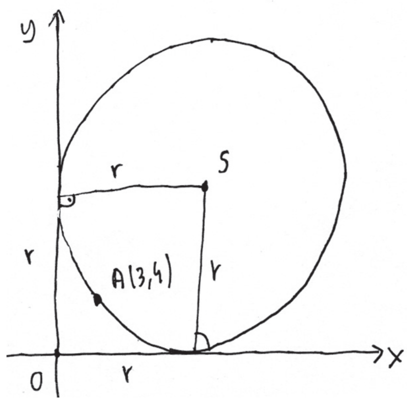
$$r^2-14r+25=0.$$

Wyznaczamy stąd:

$$r=7-2\sqrt{6}\ \ (>0) \text{ oraz } r=7+2\sqrt{6}\,.$$

Zatem środek okręgu może mieć współrzędne: $S\left(7-2\sqrt{6};\,7-2\sqrt{6}\right)$ lub $S\left(7+2\sqrt{6};\,7+2\sqrt{6}\right)$.

Pierwszy przypadek dotyczy rysunku 1, drugi poniższego rysunku:



,

rys. 2

Zadanie 14.

Ponieważ wielomian $W(x)$ jest trzeciego stopnia, to zachodzi równość:

$$x^3-(m+2)x^2+(2m+1)x-n=(x-1)^3 \text{ dla } x\in R \text{ (dlaczego?)},$$

czyli:

$$x^3-(m+2)x^2+(2m+1)x-n=x^3-3x^2+3x-1 \text{ dla } x\in R.$$

Zatem:

$$-(m+2)=-3 \text{ i } (2m+1)=3 \text{ i } -n=-1,$$

czyli:

$$m=1 \text{ i } m=1 \text{ i } n=1.$$

Odpowiedź: $m=1$ i $n=1$.

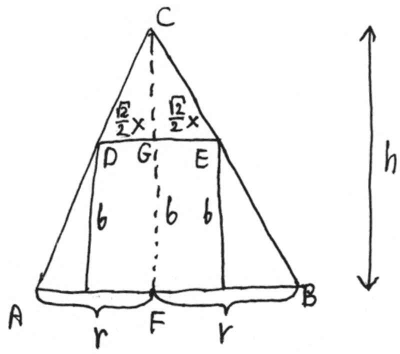
Zadanie 15.

Oto przekrój stożka i prostopadłościanu:

x – długość krawędzi podstawy prostopadłościanu (kwadratu),

$\sqrt{2}x$ – przekątna kwadratu,

b – krawędź boczna prostopadłościanu.



$x \in (0; \sqrt{2}\,r)$. Uzasadnij – dlaczego?

Z podobieństwa trójkątów DGC i AFC mamy równość:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{r} = \frac{h-b}{h},$$

skąd:

$$b = h\left(1 - \frac{\sqrt{2}\,x}{r}\right).$$

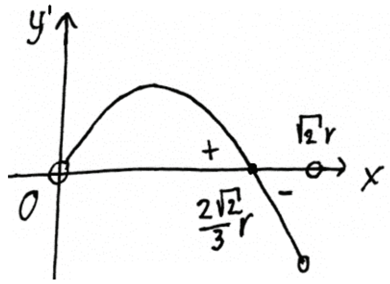
Zatem objętość prostopadłościanu wynosi:

$$V(x) = x^2 b = h\left(x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2r}x^3\right).$$

Stąd:

$$V'(x) = h\left(2x - \frac{3\sqrt{2}}{2r}x^2\right).$$

Oto wykres pochodnej.



Wobec tego funkcja $y=V(x)$ osiąga w punkcie $x=\frac{2\sqrt{2}}{3}r$ maksimum (dlaczego?).

$$V_{\max} = V\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right) = h\left(\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2r}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}r\right)^3\right) = \frac{8}{27}hr^2.$$

Witold Bednarek