

autor: **Beata Lewczuk**

Zadanie 1. *Znajdź liczbę, która jest zupełnym kwadratem i pozostanie nim również wówczas, gdy zmniejszymy ją o 8 lub też zwiększymy ją o 7.*

Rozwiązanie 1. *Oznaczmy szukaną liczbę przez x . Wtedy - z warunków zadania - mamy:*

$$x + 7 = a^2,$$

$$x = b^2,$$

$$x - 8 = c^2,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbf{N}$.

Porządkowując dostajemy:

$$x = a^2 - 7,$$

$$x = b^2,$$

$$x = c^2 + 8.$$

Możemy porównać równanie pierwsze i trzecie ($x = x$):

$$a^2 - 7 = c^2 + 8$$

$$a^2 - c^2 = 15$$

$$(a + c)(a - c) = 15$$

Poruszamy się w liczbach naturalnych, dlatego $a + c > 0$. A stąd wynika, że $a - c > 0$ (ponieważ ich iloczyn daje liczbę dodatnią). Biorąc powyższe rozważania pod uwagę jedynymi możliwymi wynikami są:

$$\begin{cases} a + c = 15 \\ a - c = 1 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a + c = 5 \\ a - c = 3 \end{cases}$$

Spróbujmy rozwiązać powyższe układy: Przypadek 1.

$$\begin{cases} a + c = 15 \\ a - c = 1 \end{cases}$$

Dodając stronami dostaniemy: $2a = 16 \Rightarrow a = 8$.

Natomiast odejmując mamy: $2c = 14 \Rightarrow c = 7$.

Obliczmy x na przykład za pomocą a :

$$x = a^2 - 7 = 8^2 - 7 = 64 - 7 = 57$$

x nie jest kwadratem zupełnym stąd takie rozwiązanie nie spełnia założeń zadania.

Sprawdźmy przypadek 2.

$$\begin{cases} a + c = 5 \\ a - c = 3 \end{cases}$$

Dodając stronami dostaniemy: $2a = 8 \Rightarrow a = 4$.

Natomiast odejmując mamy: $2c = 2 \Rightarrow c = 1$.

Obliczmy x na przykład za pomocą a :

$$x = a^2 - 7 = 4^2 - 7 = 16 - 7 = 9$$

Widzimy, że x jest kwadratem zupełnym, tzn.

$$9 = x = b^2 = 3^2$$

Stąd rozwiązaniem naszego zadania jest $x = 9$.