Łukasz Kołodziej (Dobrzeń Wielki)

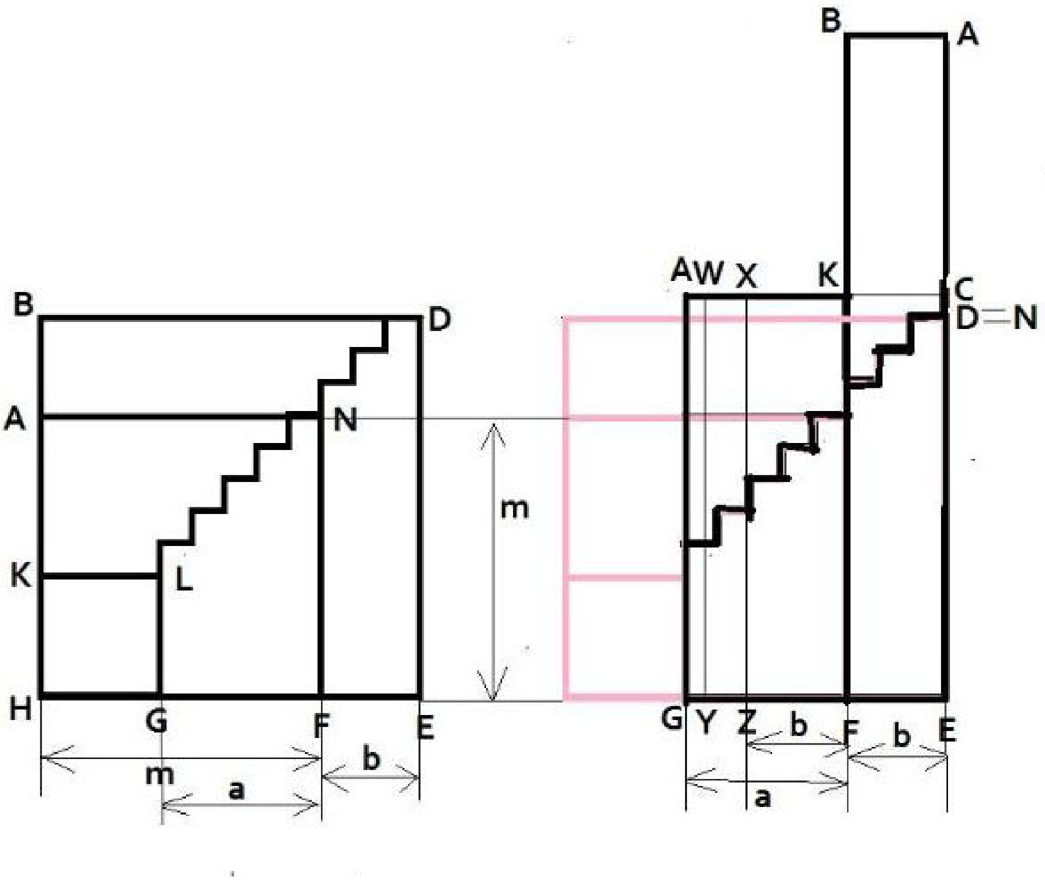
„Znajdź liczbę, która jest kwadratem zupełnym i pozostaje nim również wówczas, gdy zmniejszymy ją o 8 lub też zwiększymy ją o 7”.

Niech szukana liczba jest wymierna postaci $\frac{m^2}{n^2}$. Po dodaniu do tej liczby 7 lub odjęciu od niej 8 ma pozostać również kwadratem zupełnym, wówczas:

$$\frac{m^2}{n^2}+7=\frac{m^2+7n^2}{n^2} \quad ; \quad \frac{m^2}{n^2}-8=\frac{m^2-8n^2}{n^2} \quad \text{są kwadratami.}$$

Aby ułamki $\frac{m^2+7n^2}{n^2}$ i $\frac{m^2-8n^2}{n^2}$ były kwadratami zupełnymi, licznik i mianownik

muszą być kwadratami zupełnymi. Jak widać oba mianowniki spełniają te kryterium, więc należy zająć się tylko licznikami. Posłużą nam do tego gnomony. (Rysunek poniższy jest tylko poglądowy i nie należy się sugerować rozmiarami boków itp. Należy uważać na dwa różne punkty prawego rysunku, nazwane literą A, będące jednym punktem na lewym rysunku).



Pole gnomonu *BDEFNA* jest równe $7n^2$, a gnomonu *ANFGLK* jest $8n^2$. Po wyprostowaniu ich w prostokącie *AKFG* na boku *a* odmierzyłem odcinek *b* i oznaczyłem go prostą *XZ*. Powstaje w ten sposób prostokąt *XKFZ* o polu równym polu prostokąta *KCEF*, z powodu wspólnego boku *KF*. Następnie dorysowałem prostą *WY*, tak by powstały prostokąt *AWYG* miał pole równe $1n^2$. Teraz prostokąt *WKFY* i *BAEF* mają pola równe $7n^2$. A z powodu równości pól prostokątów *KCEF* i *XKFZ*, pola prostokątów *BACK* i *WXZY* też są równe. Pole prostokąta *AKFG* jest równe $AG \cdot a$, pole prostokąta *AXZG*: $(a-b) \cdot AG$, stąd:

$$\frac{P_{AKFG}}{P_{AXZG}} = \frac{AG \cdot a}{(a-b) \cdot AG} = \frac{a}{(a-b)}$$

Z drugiej strony pole prostokąta *AKFG* jest równe $8n^2$ co wynika z treści zadania. Pole prostokąta *AXZG* jest równe sumie pól prostokątów *AWYG* i *WXZY*. Pole pierwszego jest równe $1n^2$, a drugiego tyle ile ma prostokąt *BACK*. Wyznaczę pole prostokąta *BACK*. Najpierw wyznaczę długość boku *CA*: jest to różnica odcinków *EA* i *EC*: $CA=EA-EC$. Odcinek *EC* ma długość $EC=2m-a$, a odcinek $EA=2m+b$. Czyli $CA=2m+b-(2m-a)= a+b$. Tak więc pole prostokąta *BACK* jest równe $(a+b) \cdot b$. Ostatecznie $P_{AXZG} = P_{AWYG} + P_{WXZY} = [(a+b) \cdot b] + n^2$. Stąd:

$$\frac{P_{AKFG}}{P_{AXZG}} = \frac{8n^2}{[(a+b) \cdot b] + n^2}$$

Przyrównując oba ułamki otrzymuję:

$$\frac{a}{(a-b)} = \frac{8n^2}{[(a+b) \cdot b] + n^2}$$

Wyznaczam z tego n^2:

$$8n^2 \cdot (a-b) = [(a+b) \cdot a \cdot b] + a \cdot n^2$$

$$8n^2 \cdot (a-b) - a \cdot n^2 = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(8 \cdot (a-b) - a) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(8a - 8b - a) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(7a - 8b) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7a-8b}$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7a-7b-b}$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7(a-b)-b}$$

Ponieważ n^2 ma być liczbą całkowitą mianownik musi się skrócić z licznikiem. Aby wyznaczyć szukaną liczbę $\frac{m^2}{n^2}$ wprowadzamy odcinek o długości *k* tak, by $a=pk$ i $b=qk$, gdzie *p* i *q* są liczbami naturalnymi. Niech np. $b=7k$, wówczas:

$$n^2 = \frac{[(a+7k)\cdot a\cdot 7k]}{7(a-7k)-7k}$$

$$n^2 = \frac{[(a+7k)\cdot a\cdot k]}{(a-7k)-k}$$

$$n^2 = \frac{[(a+7k)\cdot a\cdot k]}{a-8k}$$

Niech teraz $a=9k$, wówczas

$$n^2 = \frac{[(9k+7k)\cdot 9k\cdot k]}{9k-8k}$$

$$n^2 = \frac{[(9k+7k)\cdot 9k\cdot k]}{k}$$

$$n^2 = [(9k+7k)\cdot 9k]$$

$$n^2 = 144k^2$$
$$n = 12k$$

Wracam do pola prostokąta *AXZG*:
$$P_{AXZG} = AG\cdot(a-b)$$
$$P_{AXZG} = [(a+b)\cdot b] + n^2$$

Przyrównując je otrzymuję:
$$AG\cdot(a-b) = [(a+b)\cdot b] + n^2$$

Podstawiam do tego $n^2 = 144k^2$, $a=9k$, $b=7k$ i obliczam długość boku *AG*:
$$AG\cdot(9k-7k) = [(9k+7k)\cdot 7k] + 144k^2$$
$$AG\cdot 2k = [16k\cdot 7k] + 144k^2$$
$$AG\cdot 2k = 112k^2 + 144k^2$$
$$AG\cdot 2k = 256k^2$$
$$AG = 128k$$

Z drugiej strony bok *AG* jest równy $2m-a$
$$AG = 2m-a$$
$$128k = 2m-9k$$
$$m = \frac{137k}{2}$$

Mam więc liczby *m* i *n*, więc obliczam poszukiwaną liczbę:
$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{\left(\frac{137k}{2}\right)^2}{144k^2} = \frac{(137k)^2}{2^2\cdot 144k^2} = \frac{18769}{576}$$

Na koniec sprawdzam czy moja liczba spełnia warunki zadania:

$\frac{18769}{576}+7=\frac{22801}{576} \quad \Leftrightarrow \frac{137^2}{24^2}+7=\frac{151^2}{24^2}$

$\frac{18769}{576}-8=\frac{14161}{576} \quad \Leftrightarrow \frac{137^2}{24^2}-8=\frac{119^2}{24^2}$

Odpowiedź: Poszukiwana liczba to $\frac{18769}{576}$.

Uwaga redakcji:
Jest to jedno z rozwiązań zadania przy q=7 i p=9. Obranie innych współczynników za q i p może dać całkiem inne rozwiązanie, np. dla q=1 i p=2 rozwiązaniem jest liczba 9. Warto też zauważyć, że nie każde podstawienie za q i p prowadzi do rozwiązania zadania.