

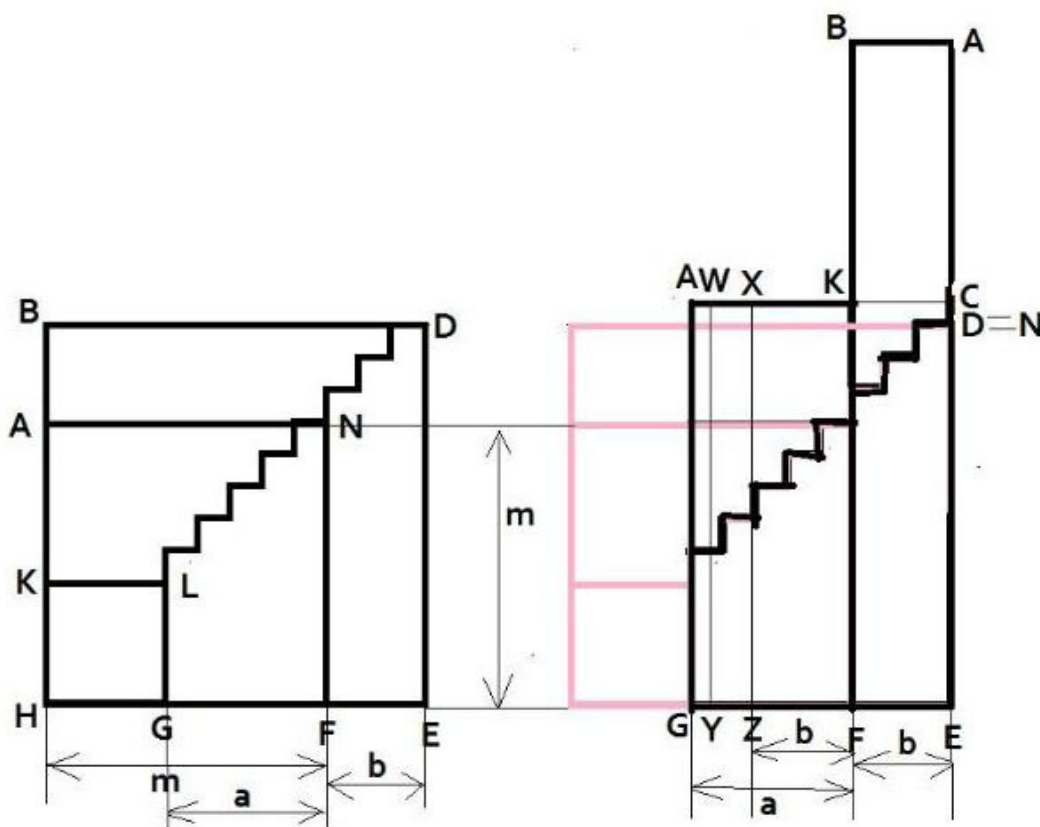
„Znajdź liczbę, która jest kwadratem zupełnym i pozostaje nim również wówczas, gdy zmniejszymy ją o 8 lub też zwiększymy ją o 7”.

Niech szukana liczba jest wymierna postaci $\frac{m^2}{n^2}$. Po dodaniu do tej liczby 7 lub odjęciu od niej 8 ma pozostać również kwadratem zupełnym, wówczas:

$$\frac{m^2}{n^2} + 7 = \frac{m^2 + 7n^2}{n^2} ; \frac{m^2}{n^2} - 8 = \frac{m^2 - 8n^2}{n^2} \text{ są kwadratami.}$$

Aby ułamki $\frac{m^2 + 7n^2}{n^2}$ i $\frac{m^2 - 8n^2}{n^2}$ były kwadratami zupełnymi, licznik i mianownik

muszą być kwadratami zupełnymi. Jak widać oba mianowniki spełniają te kryterium, więc należy zająć się tylko licznikami. Posłużą nam do tego gnomony. (Rysunek poniższy jest tylko poglądowy i nie należy się sugerować rozmiarami boków itp. Należy uważać na dwa różne punkty prawego rysunku, nazwane literą A, będące jednym punktem na lewym rysunku).



Pole gnomonu $BDEFNA$ jest równe $7n^2$, a gnomonu $ANFGLK$ jest $8n^2$. Po wyprostowaniu ich w prostokącie $AKFG$ na boku a odmierzyłem odcinek b i oznaczyłem go prostą XZ . Powstaje w ten sposób prostokąt $XKFZ$ o polu równym polu prostokąta $KCEF$, z powodu wspólnego boku KF . Następnie dorysowałem prostą WY , tak by powstały prostokąt $AWYG$ miał pole równe $1n^2$. Teraz prostokąt $WKFY$ i $BAEF$ mają pola równe $7n^2$. A z powodu równości pól prostokątów $KCEF$ i $XKFZ$, pola prostokątów $BACK$ i $WXZY$ też są równe. Pole prostokąta $AKFG$ jest równe $AG \cdot a$, pole prostokąta $AXZG$: $(a-b) \cdot AG$, stąd:

$$\frac{P_{AKFG}}{P_{AXZG}} = \frac{AG \cdot a}{(a-b) \cdot AG} = \frac{a}{(a-b)}$$

Z drugiej strony pole prostokąta $AKFG$ jest równe $8n^2$ co wynika z treści zadania. Pole prostokąta $AXZG$ jest równe sumie pól prostokątów $AWYG$ i $WXZY$. Pole pierwszego jest równe $1n^2$, a drugiego tyle ile ma prostokąt $BACK$. Wyznaczę pole prostokąta $BACK$. Najpierw wyznaczę długość boku CA : jest to różnica odcinków EA i EC : $CA=EA-EC$. Odcinek EC ma długość $EC=2m-a$, a odcinek $EA=2m+b$. Czyli $CA=2m+b-(2m-a)=a+b$. Tak więc pole prostokąta $BACK$ jest równe $(a+b) \cdot b$. Ostatecznie $P_{AXZG} = P_{AWYG} + P_{WXZY} = [(a+b) \cdot b] + n^2$. Stąd:

$$\frac{P_{AKFG}}{P_{AXZG}} = \frac{8n^2}{[(a+b) \cdot b] + n^2}$$

Przyrównując oba ułamki otrzymuję:

$$\frac{a}{(a-b)} = \frac{8n^2}{[(a+b) \cdot b] + n^2}$$

Wyznaczam z tego n^2 :

$$8n^2 \cdot (a-b) = [(a+b) \cdot a \cdot b] + a \cdot n^2$$

$$8n^2 \cdot (a-b) - a \cdot n^2 = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(8 \cdot (a-b) - a) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(8a - 8b - a) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2(7a - 8b) = [(a+b) \cdot a \cdot b]$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7a - 8b}$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7a - 7b - b}$$

$$n^2 = \frac{[(a+b) \cdot a \cdot b]}{7(a-b) - b}$$

Ponieważ n^2 ma być liczbą całkowitą mianownik musi się skrócić z licznikiem. Aby wyznaczyć szukaną liczbę $\frac{m^2}{n^2}$ wprowadzamy odcinek o długości k tak, by $a=pk$ i $b=qk$, gdzie p i q są liczbami naturalnymi. Niech np. $b=7k$, wówczas:

$$n^2 = \frac{[(a+7k) \cdot a \cdot 7k]}{7(a-7k) - 7k}$$

$$n^2 = \frac{[(a+7k) \cdot a \cdot k]}{(a-7k) - k}$$

$$n^2 = \frac{[(a+7k) \cdot a \cdot k]}{a - 8k}$$

Niech teraz $a=9k$, wówczas

$$n^2 = \frac{[(9k+7k) \cdot 9k \cdot k]}{9k - 8k}$$

$$n^2 = \frac{[(9k+7k) \cdot 9k \cdot k]}{k}$$

$$n^2 = [(9k + 7k) \cdot 9k]$$

$$n^2 = 144k^2$$

$$n = 12k$$

Wracam do pola prostokąta AXZG:

$$P_{AXZG} = AG \cdot (a - b)$$

$$P_{AXZG} = [(a + b) \cdot b] + n^2$$

Przyrównując je otrzymuję:

$$AG \cdot (a - b) = [(a + b) \cdot b] + n^2$$

Podstawiam do tego $n^2 = 144k^2$, $a=9k$, $b=7k$ i obliczam długość boku AG:

$$AG \cdot (9k - 7k) = [(9k + 7k) \cdot 7k] + 144k^2$$

$$AG \cdot 2k = [16k \cdot 7k] + 144k^2$$

$$AG \cdot 2k = 112k^2 + 144k^2$$

$$AG \cdot 2k = 256k^2$$

$$AG = 128k$$

Z drugiej strony bok AG jest równy $2m - a$

$$AG = 2m - a$$

$$128k = 2m - 9k$$

$$m = \frac{137k}{2}$$

Mam więc liczby m i n , więc obliczam poszukiwaną liczbę:

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{\left(\frac{137k}{2}\right)^2}{144k^2} = \frac{(137k)^2}{2^2 \cdot 144k^2} = \frac{18769}{576}$$

Na koniec sprawdzam czy moja liczba spełnia warunki zadania:

$$\frac{18769}{576} + 7 = \frac{22801}{576} \quad \Leftrightarrow \frac{137^2}{24^2} + 7 = \frac{151^2}{24^2}$$

$$\frac{18769}{576} - 8 = \frac{14161}{576} \quad \Leftrightarrow \frac{137^2}{24^2} - 8 = \frac{119^2}{24^2}$$

Odpowiedź: Poszukiwana liczba to $\frac{18769}{576}$.

Uwaga redakcji:

Jest to jedno z rozwiązań zadania przy $q=7$ i $p=9$. Obranie innych współczynników za q i p może dać całkiem inne rozwiązanie, np. dla $q=1$ i $p=2$ rozwiązaniem jest liczba 9. Warto też zauważyć, że nie każde podstawienie za q i p prowadzi do rozwiązania zadania.