ROZKŁADY LICZB

Przedstawiamy rozwiązanie zadania, jakie ukazało się w 28. numerze Świata Matematyki. Będzie ono oczywiste dla czytelników, którzy zapoznali się z artykułem „Rozkład na sumę" zamieszczonym w tym, numerze. Z uwagi na brak miejsca w 29. numerze rozwiązanie publikujemy w internecie dla wszystkich użytkowników strony www.swiatmatematyki.pl

ZADANIE

Zajmiemy się teraz ilością rozkładów $r(L)$ liczb naturalnych na sumy kolejnych liczb całkowitych. Liczby L_1, L_2 i L_3 są (dodatnimi) liczbami naturalnymi większymi od 1, takimi, że $r(L_1) = r_1$, $r(L_2) = r_2$, $r(L_3) = r_3$. Żadna z trzech par liczb (L_1, L_2), (L_2, L_3), (L_3, L_1), nie ma żadnego, większego od 1, nieparzystego wspólnego dzielnika. Oblicz ilość rozkładów $r(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3)$.

Rozwiązanie

Wykorzystamy twierdzenie z artykułu „Rozkład na sumę", które ukazało się w *Świecie Matematyki* nr 28 (4/2013).

Niech liczby L_1 i L_2 będą (dodatnimi) liczbami naturalnymi większymi od 1.
Jeśli liczby L_1 i L_2 nie mają żadnego nieparzystego wspólnego dzielnika, większego od 1, to

$$r(L_1 \cdot L_2) = \left[r(L_1) + 1\right] \cdot \left[r(L_2) + 1\right] - 1 = r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_1) + r(L_2).$$

Liczby L_1 i L_2 nie mają żadnego nieparzystego wspólnego dzielnika, większego od 1, oznacza, że nie ma takiej samej liczby pierwszej różnej od 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze liczb L_1 i L_2.

Niech:

$$M_1 = L_1 \cdot L_2$$
$$M_2 = L_3$$

Jeśli liczby L_1, L_2 i L_3 są (dodatnimi) liczbami naturalnymi większymi od 1, takimi, że żadna z trzech par liczb (L_1, L_2), (L_2, L_3) oraz (L_3, L_1), nie ma żadnego nieparzystego, większego od 1, wspólnego dzielnika, to liczby M_1 i M_2 nie mają żadnego nieparzystego wspólnego dzielnika, większego od 1, więc zgodnie z powyższym twierdzeniem zachodzi

$$r(M_1 \cdot M_2) = \left[r(M_1) + 1\right] \cdot \left[r(M_2) + 1\right] - 1.$$

Zgodnie z założeniami rozwiązania, ponieważ $M_2 = L_3$, to $r(M_2) = r(L_3)$.

1. Obliczmy teraz $r(M_1)$. Ponieważ $M_1 = L_1 \cdot L_2$ zatem

$$r(M_1) = r(L_1 \cdot L_2) = r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_1) + r(L_2).$$

2. Teraz, korzystając ze wzoru na $r(M_1 \cdot M_2)$ obliczmy $r(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3)$:

$$r(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3) = r(M_1 \cdot M_2) = [r(M_1) + 1] \cdot [r(M_2) + 1] - 1 =$$
$$= [r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_1) + r(L_2) + 1] \cdot [r(L_3) + 1] - 1 =$$
$$= r(L_1) \cdot r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_3) + r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_1) + r(L_2) + 1 - 1 =$$
$$= r(L_1) \cdot r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_3) + r(L_1) + r(L_2) + r(L_3),$$

zatem

$$\boxed{r(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3) = r(L_1) \cdot r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_2) + r(L_2) \cdot r(L_3) + r(L_1) \cdot r(L_3) + r(L_1) + r(L_2) + r(L_3).}$$

Powyższy wzór możemy zapisać w następującej postaci:

$$r(L_1 \cdot L_2 \cdot L_3) = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_2 + r_2 \cdot r_3 + r_1 \cdot r_3 + r_1 + r_2 + r_3 \,.$$

Przykładem zastosowania tego wzoru może być poprzednie zadanie, przedstawione w 28. a rozwiązane w 29. numerze *Świata Matematyki*. Znajdźmy ilość rozkładów na sumy liczby 2015. Możemy ją zapisać w postaci iloczynu

$$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Ponieważ liczby 5, 13 i 31 są liczbami pierwszymi, tak więc $r(5) = 1$, $r(13) = 1$, $r(31) = 1$. Korzystając zatem z wyznaczonego już wzoru możemy zapisać:

$$r(2015) = r(5) \cdot r(13) \cdot r(31) + r(5) \cdot r(13) + r(13) \cdot r(31) + r(5) \cdot r(31) + r(5) + r(13) + r(31) =$$
$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 + 1 + 1 = 7.$$

W rozwiązaniu tego zadania, przedstawionym w 29. numerze *Świata Matematyki*, wyznaczyliśmy wszystkie rozkłady liczby 2015 na sumy kolejnych liczb naturalnych. Rozkładów tych było siedem, zatem wszystko się zgadza.

Marian Maciocha