## HISTORIA ZERA

Kto odkrył zero? Na to pytanie trudno udzielić jednoznacznej i wyczerpującej odpowiedzi. Byłoby to możliwe, gdyby zero zostało odkryte przez jakąś konkretną osobę, a fakt ten historia nauki odnotowała jako błyskotliwe odkrycie matematyczne. Historia natomiast ukazuje nam całkiem inną drogę, a właściwie kilka dróg wiodących do odkrycia zera.

Patrząc retrospektywnie, widzimy, że w niektórych systemach matematycznych zero było obecne, ale pojawiało się w swoisty sposób – niezależnie od siebie i różnoczasowo. Wydaje się, że matematycy nie zawsze mieli świadomość jego znaczenia, nawet wówczas, gdy się nim posługiwali.

Pierwszą rzeczą, jaką należy powiedzieć o zerze, jest to, że ma ono dwa zastosowania. Oba są bardzo ważne, lecz całkiem różne. Po pierwsze zero pełni rolę wskaźnika braku jednostek danego rzędu, czyli „pustego miejsca” w naszym pozycyjnym systemie numeracji. To znaczy, że w liczbie 2106 zero pozwala prawidłowo wyznaczyć pozycję liczb 2 i 1, bo przecież 216 to całkiem inna liczba. W drugim przypadku zero stanowi liczbę samą w sobie, jako 0, w takiej formie, jak obecnie jest używane.

W obu tych zastosowaniach ciekawe są różne aspekty zera, takie jak nazwa, która (podobnie jak wyraz „szyfr”) pochodzi z arabskiego słowa „syfir”, notacja, czyli oznaczenie umownym znakiem czy symbolem, i wreszcie samo pojęcie, czyli myślowy odpowiednik nazwy.

Żadne z powyższych zastosowań nie ma łatwo wytłumaczalnej historii. Nie było bowiem tak, że ktoś nagle wynalazł zero i od razu weszło ono do powszechnej praktyki matematycznej. Należy też zaznaczyć, że matematyka wyrosła z praktyki życia codziennego. O liczbach pierwotnie myślano jako o konkretach, a nie abstrakcyjnie. Na przykład starożytny rolnik potrzebował pewnej konkretnej, ściśle określonej liczby koni i nie zastanawiał się, czy to jest liczba 0 czy 23. Musiał dopiero dokonać się olbrzymi skok mentalny od pojęcia np. pięciu koni, czyli pięciu „przedmiotów”, do abstrakcyjnego pojęcia samej liczby pięć.

Można by pomyśleć, że gdy powstawał pozycyjny system numeracji, to 0, jako wskaźnik „pustego miejsca”, było niezbędnym jego składnikiem, gdyby nie to, że Babilończycy stosowali taki system bez liczby zero przez przeszło tysiąc lat. Co więcej, nie ma dowodów na to, że mieli oni jakiekolwiek trudności z tego powodu. Przetrwały oryginalne babilońskie teksty matematyczne w postaci glinianych tabliczek, na których symbole napisano pismem klinowym za pomocą ukośnie ściętych rylców. Wiele dających się odczytać tablic pochodzi z ok. 1700 r. p.n.e. Babilończycy stosowali sześćdziesiątkowy system liczbowy. Gdyby chcieli jednak przełożyć swoją symbolikę na naszą, nie rozróżniliby liczby 2106 od 216, gdyż jedynie z kontekstu wynikałoby, która liczba została użyta. Dopiero od ok. 400 r. p.n.e. zaczęli stosować dwa symbole klinowe w miejscu, gdzie my umieścilibyśmy zero, czyli 2106 wyglądałoby jak 21”6. Jednakże te dwa kliny nie były jedynymi znakami zastępującymi liczbę 0 stosowanymi w tym regionie. W starożytnym mezopotamskim mieście Kish, położonym na wschód od Babilonii (dzisiejszy południowo-środkowy Irak), znaleziono tabliczki datowane na ok. 700 r. p.n.e., na których 0 pozycyjne, czyli „puste miejsce”, zaznaczone jest zarówno jednym, jak i trzema klinami. Tak więc symbole były różne, ale miały jedną cechę wspólną – zawsze umieszczano je w środku liczby, nigdy na końcu. Mogło być 21”6, ale nie 216”. Można przypuszczać, że konkretna wartość, o jaką chodziło, wynikała z kontekstu.

Jeżeli dawne odniesienia do kontekstu mogą się komuś wydawać niemądre, to warto zauważyć, że dzisiaj również stosujemy kontekst do interpretacji liczb. Oto przykład: pytając w kasie o cenę biletu autobusowego, usłyszymy odpowiedź, np.: „trzynaście pięćdziesiąt”, co oznacza trzynaście złotych i pięćdziesiąt groszy. Jeżeli jednak spytamy się o cenę biletu lotniczego, to usłyszymy już wartość dokładną: „tysiąc trzysta pięćdziesiąt złotych”. Jak widać, dawne zastosowanie zera pozycyjnego nie było w istocie matematycznym rozumieniem zera. Stanowiło jedynie znak interpunkcyjny, dzięki któremu liczby były prawidłowo interpretowane.

Starożytni Grecy zaczęli rozwijać matematykę w tym czasie, kiedy Babilończycy stosowali 0 pozycyjne, jednak nie przyjęli pozycyjnego systemu numeracji. Można zadać pytanie: dlaczego, skoro system ten miał wiele zalet? Otóż dlatego, że matematyka starożytnych Greków oparta jest na geometrii Euklidesa i na jego geometrycznej teorii liczb, którą wyłożył w „Elementach”, a nazwy liczb na alfabecie greckim. Tak więc żadna pomysłowa symbolika nie była im potrzebna. Nazwami liczb operowali jedynie kupcy przy zapisywaniu transakcji. Wyjątek stanowili też greccy astronomowie, którzy jako pierwsi użyli symbolu 0 w takim rozumieniu, w jakim stosujemy go obecnie.

Dlaczego użyli właśnie takiego znaku graficznego? Jest kilka teorii na ten temat. Niektórzy historycy twierdzą, że 0 oznacza „omikron”, czyli pierwszą literę greckiego słowa „ouden”, które znaczy „nic”. Tę teorię odrzuca Neugebau-

Świat MATEMATYKI
Pismo dla młodzieży szkolnej

**Redaktor Naczelny** Eugeniusz Sikorski

**Adres Redakcji** Czasopismo „Świat Matematyki”
ul. Oleśnicka 15B, 50-320 Wrocław, e-mail: redakcja@swiatmatematyki.pl

**Wydawca** MEDIACOM SP. Z O.O.
ul. Jeziorowa 27, 51-252 Wrocław, e-mail: biuro@swiatmatematyki.pl

er, który dowodzi, że Grecy słowem „omikron” oznaczali liczbę 70. Inni sugerują związek znaku 0 z obolem – monetą o minimalnej wartości. Istnieje też pogląd, że 0 zawdzięczamy starożytnym liczydłom opieranym na piaskowych tablicach. W trakcie obliczeń, aby zostawić pustą kolumnę, liczydło usuwano. Wówczas w tym miejscu zostawało wgłębienie przypominające kształtem właśnie 0.

Ptolemeusz, jeden z ważniejszych uczonych w Aleksandrii, w swoim dziele „Almagest” (ok. 130 r.) posługuje się sześćdziesiątkowym systemem liczbowym, w którym funkcjonuje 0 pozycyjne. Pełni ono rolę znaku interpunkcyjnego, a nie liczby i pojawia się zarówno między cyframi, jak i na końcu liczby. Wydawać by się mogło, że w tej roli przyjmie się na dobre, jednakże tak się jeszcze nie stało. W Aleksandrii symbol ten stosowali jedynie nieliczni astronomowie i musiało upłynąć jeszcze mnóstwo czasu, zanim wszedł on do powszechnej praktyki.

Jak wspomniano na wstępie, idea zera jako miejsca dziesiętnego, czyli liczby, pojawiła się niezależnie w różnych kulturach. Około IV w. zero dwudziestkowe wynaleźli Majowie zamieszkujący Amerykę Środkową, którzy posługiwali się dwudziestkowym pozycyjnym systemem liczbowym. Niestety, to osiągnięcie miało wyłącznie lokalne znaczenie.

Najdonioślejsze natomiast było odkrycie zera po raz trzeci, którego dokonali Hindusi ok. V w. W wynalezionym przez nich systemie dziesiątkowym pojawiła się idea zera jako miejsca dziesiętnego, czyli liczby. Ten system liczbowy w XIII w. za pośrednictwem kupców arabskich rozprzestrzenił się w całym ówczesnym cywilizowanym świecie. Z tego względu nosi nazwę systemu arabskiego, a same cyfry 0, 1, ... 9 to cyfry arabskie. Posługujemy się nimi dzisiaj powszechnie.

Trzeba tu koniecznie dodać, że wielu historyków nauki twierdzi, że matematyka indyjska oparta jest na wcześniejszych systemach naukowych, takich jak astronomia chaldejska czy grecka. Tak więc niesłuszne i irracjonalne jest przypisywanie tego wynalazku wyłącznie Hindusom, jak czynią to czasem historycy indyjscy, chociażby Mukherjee, który twierdzi, że „(...) matematyczna koncepcja zera (...) była także obecna w duchowej formie 17 tys. lat temu w Indiach”.

Opierając się na źródłach historycznych, można ustalić, że w V w. Aryabhata wynalazł pozycyjny system liczbowy, który nie posiadał jeszcze zera. W „pustych miejscach” pisano słowo „kha”. W rękopisach stosowano również w tym celu maleńką kropkę (sanskr. Siunja „nic”). Co ciekawe, kropki używano do wskazania wartości nieznanej, tak jak dziś stosujemy x.

Za oficjalną datę wynalezienia zera w Indiach uważa się rok 876, na który datuje się pewną informację wyrytą na kamieniu. Otóż, jak głosi inskrypcja, w mieście Gwalior, 400 km na południe od Delhi, w ogrodzie o wymiarach 187 na 270 hastas posadzono taką liczbę kwiatów, która umożliwiała dostarczenie codziennie 50 wieńców dla pobliskiej świątyni. Zera wyryte w liczbach mają nieco inny kształt od pisanych obecnie. Są nieco mniejsze i lekko przesunięte w górę.

Trzeba tu podkreślić, że w powyższym tekście zero jeszcze nie figuruje w kategoriach liczby. Nie zakończył się jeszcze proces mentalnego przejścia od pewnego liczebnego konkretu wyrażanego słownie do pojęcia abstrakcyjnego. Z chwilą jego zakończenia, kiedy zero ukonstytuowało się jako liczba, poszerzyły się pola dociekań matematycznych. Pojawiły się liczby ujemne i różne problemy związane z działaniami arytmetycznymi na tych liczbach, jak i arytmetyczne oddziaływanie na siebie zera i liczb ujemnych. Chodzi tu o dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie z udziałem zera i liczb ujemnych. Problematykę tę zgłębiali w swoich dziełach trzej ważni uczeni: Brahmagupta, Mahavira i Bhaskara.

Brahmagupta w VII w. próbował ustalić reguły arytmetyczne w działaniach na zerze i liczbach ujemnych. Są one następujące:

Reguła dodawania z liczbą zero: Suma zera oraz liczby ujemnej jest ujemna, suma liczby dodatniej i zera jest dodatnia, suma zera i zera jest zerem.

Reguła odejmowania (trochę trudniejsza): Liczba ujemna odjęta od zera jest liczbą dodatnią, liczba dodatnia odjęta od zera jest liczbą ujemną, zero odjęte od liczby ujemnej daje liczbę ujemną, zero odjęte od liczby dodatniej daje liczbę dodatnią, zero odjęte od zera wynosi zero.

Reguła mnożenia głosi, że dowolna liczba pomnożona przez zero staje się zerem, lecz dzielenie wygląda trochę trudniej: Liczba dodatnia lub ujemna, gdy podzielona zostaje przez zero, stanowi ułamek z zerem w mianowniku. Zero podzielone przez dodatnią lub ujemną liczbę jest zerem albo ułamkiem z zerem w liczniku i skończoną liczbą w mianowniku. Zero podzielone przez zero daje zero.

Brahmagupta, jak widać, nie potrafił ustalić jasnych reguł arytmetycznych, ale przyczynił się w sposób istotny do

Świat
Pismo dla młodzieży szkolnej
MATEMATYKI

**Redaktor Naczelny** Eugeniusz Sikorski
**Adres Redakcji** Czasopismo „Świat Matematyki”
ul. Oleśnicka 15B, 50-320 Wrocław, e-mail: redakcja@swiatmatematyki.pl
**Wydawca** MEDIACOM SP. Z O.O.
ul. Jeziorowa 27, 51-252 Wrocław, e-mail: biuro@swiatmatematyki.pl

rozwoju matematyki, bowiem poszerzył znacznie obszar arytmetyki o działania na liczbie zero i liczbach ujemnych.

Do powyższej problematyki nawiązał Mahavira w 830 r., czyli prawie dwieście lat później. Jego dzieło „Ganita Sara Samgraha" kontynuuje myśl Brahmagupty i jednocześnie rewiduje niektóre twierdzenia, jak chociażby regułę odejmowania. Pisze, że: Liczba pomnożona przez zero jest zerem oraz liczba pozostaje ta sama, gdy odejmuje się zero od tej liczby.

Natomiast reguła dzielenia przez zero brzmi następująco: Liczba nie ulega zmianie, gdy podzielona zostaje przez zero.

Jak widać, problem dzielenia przez zero pozostał nierozstrzygnięty i tak było przez kolejnych pięćset lat.

W XII w. problematykę tę zgłębiał inny matematyk – Bhaskara. Pisał on, że: Liczba podzielona przez zero staje się ułamkiem z zerem w mianowniku. Ułamek ten jest wielkością nieskończoną. W tej wartości zero jest podzielnikiem. Żadna zmiana nie zachodzi w nieskończonym i niezmiennym Bogu, gdy światy są stwarzane lub niszczone, pomimo tego, że wielka ilość istot jest pochłaniana lub wydawana.

Próbował rozwiązać ten problem, pisząc, że $n/0 = \infty$. Nie jest to prawdą, gdyż w przeciwnym razie 0 razy $\infty$ musiałoby być równe każdej liczbie n, czyniąc wszystkie liczby równymi sobie. Tak więc Bhaskara nie rozwiązał problemu dzielenia przez zero, ale opisał inne jego właściwości, np.: $0^2 = 0$ oraz $\sqrt{0} = 0$.

Te niezwykłe osiągnięcia matematyków indyjskich zostały spopularyzowane w Europie Zachodniej przez kupców arabskich, zwłaszcza wśród wyznawców islamu, którzy we wczesnym średniowieczu odegrali istotną rolę w rozwoju kultury i nauki europejskiej. W XII w. Al-Khwarizmi napisał traktat pt.: „Opis indyjskiej sztuki obliczeń matematycznych". Ibn Ezra, autor trzech dzieł poświęconych liczbom, rozpowszechnił indyjskie idee i symbole matematyczne oraz spopularyzował ułamki dziesiętne w środowisku uczonych europejskich. Jego „Księga liczb" opisuje system dziesiętny dla liczb całkowitych ułożonych od lewej do prawej strony, a zero określa jako „galgal", co oznacza krąg lub koło.

Arytmetyka liczb ujemnych i zera była nadal aktrualną dziedziną badawczą, o czym świadczą rozważania al--Samawala: Jeżeli odejmiemy liczbę dodatnią od zera, to pozostaje ta sama liczba, lecz ujemna (...) jeżeli odejmiemy ujemną liczbę od zera, to pozostaje ta sama liczba, lecz dodatnia.

Matematyczne idee indyjskie rozpowszechniły się również w Chinach i w zachodnich krajach islamskich. W 1247 r. Chińczyk Ch'in Chiu-Shao w swoim dziele „Matematyczny traktat w dziewięciu rozdziałach" użył symbolu 0 dla zera. Taki sam symbol pojawił się w 1303 r. w księdze „Jadeitowe lustro dla czterech elementów" napisanej przez Zhu Shijie.

Duże zasługi dla wprowadzenia w Europie nowego systemu numeracji należy przypisać włoskiemu matematykowi Fibonacciemu. Około 1200 r. w dziele zatytułowanym „Liber Abaci" opisał dziewięć indyjskich symboli liczbowych wraz ze znakiem 0, przy czym nie traktuje go jak liczby, gdyż mówi o nim tylko jako o znaku. Idea zera jako liczby długo jeszcze nie funkcjonowała w matematyce europejskiej. Cardano rozwiązywał równania sześcienne i czwartego stopnia bez użycia zera, ponieważ zero nie występowało w jego matematyce. Dopiero w XVII wieku zaczęło się rozpowszechniać, co miało niewątpliwy związek z rewolucją naukową, jaka się wówczas dokonała i która stworzyła podwaliny nauki nowożytnej.

Wydawać się może, że problem zera juz dawno rozwiązano, ale okazuje się, że znowu spłatało figla. Niedawno obchodzono nowe milenium. Niektórzy obchodzili je 1 stycznia 2000 r., a przecież świętowali odejście 1999 lat od momentu wprowadzenia kalendarza. Można wybaczyć ten błąd, lecz wydaje się dziwne, że większość ludzi nie rozumie, dlaczego trzecie milenium i tym samym XXI wiek rozpoczęły się 1 stycznia 2001 r.

Świat
Pismo dla młodzieży szkolnej
MATEMATYKI

**Redaktor Naczelny** Eugeniusz Sikorski

**Adres Redakcji** Czasopismo „Świat Matematyki"
ul. Oleśnicka 15B, 50-320 Wrocław, e-mail: redakcja@swiatmatematyki.pl

**Wydawca** MEDIACOM SP. Z O.O.
ul. Jeziorowa 27, 51-252 Wrocław, e-mail: biuro@swiatmatematyki.pl