Jacek Kredenc, *Pawłowice* nr 112

Wyjątkowa liczba

O liczbie π w Świecie Matematyki pisaliśmy już niejednokrotnie. Pasjonuje ona ludzi od najdawniejszych czasów. Jest to jedyna liczba, która ma swoje święto, a właściwie dwa dni świąteczne. Pierwszy dzień poświecony liczbie π to 14 marca, a drugi to 22 lipca. W te dni uczelnie organizują różne pikniki naukowe otwarte dla wszystkich, w trakcie których krzewią wiedzę matematyczną. Głównym bohaterem tych pikników naukowych jest oczywiście liczba π. Nasuwa się pytanie. Co tak bardzo pasjonowało i pasjonuje matematyków i nie tylko matematyków w liczbie π?

Po raz pierwszy znaku π jako symbolu tej liczby użył w 1706 roku William Jones w książce *Synopsis Palmariorum Mathesos*. Symbol π jest pierwszą literą greckiego słowa περίμετρον (czyt. perimetron), czyli obwód, a rozpowszechnił go później, szwajcarski matematyk i fizyk, Leonhard Euler, który większość życia spędził w Królewcu.

Wśród matematyków funkcjonują dwie pozornie różne definicje liczby π. W polskich podręcznikach, a także w Europie wschodniej i środkowej, mówi się, że π to stała równa stosunkowi długości okręgu do jego średnicy. Na zachodzie Europy i w Ameryce π to liczba równa polu koła o promieniu 1. Jednak szukając rozwinięcia dziesiętnego liczby π, niezależnie od zastosowanej definicji, otrzymamy dokładnie tę samą liczbę. Chociaż nazwę naszej bohaterki wymyślono dopiero w XVIII wieku, to „potykano się o nią" już od zarania ludzkości.

Pierwsze źródła świadczące o świadomym korzystaniu z własności liczby π pochodzą ze starożytnego Babilonu, gdzie na jednej z kamiennych tablic, datowanej na lata 1900-1680 p.n.e., pojawiają się obliczenia obwodu koła. Z tego wynika, że już w tamtych czasach Babilończycy umieli obliczyć obwód koła znając jego średnice i przyjmując, że $\pi=3\,{}^1/_8$.

Wszystkie informacje o wiedzy matematycznej starożytnych Egipcjan pochodzą z papirusa Rhinda, datowanego na XVII w pne. O osiągnięciach starożytnych Egipcjan i o tym papirusie pisaliśmy już na łamach 17. numeru *Świata Matematyki*. Ze zwoju papirusa wynika, że Egipcjanie uważali, iż pole koła równe jest polu kwadratu o boku równym 8/9 średnicy koła. Wynika z tego, że dla Egipcjan liczba π wynosiła $4^4/3^4$. Dlaczego? Możemy sprawdzić **wartość liczby π zdaniem Egipcjan!**

$$\frac{\mathrm{pi}\cdot D^2}{4}=\left(\frac{8}{9}D\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{pi}\cdot D^2}{4}=\frac{8\cdot 8}{9\cdot 9}D^2=\frac{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}D^2$$

$$\frac{\mathrm{pi}\cdot D^2}{4}=\frac{4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}D^2 \qquad /\cdot 4$$

$$\mathrm{pi}\cdot D^2=\frac{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}D^2$$

$$\mathrm{pi}=\frac{4^4}{3^4}\approx 3,16$$

Na ślady świadczące o znajomości liczby π można natrafić także w kilku miejscach Biblii. Między innymi w Drugiej Księdze Kronik (2. KRONIK 4, 2), pochodzącej z V-IV w. pne., można znaleźć słowa: *Następnie sporządził odlew okrągłego „morza" o średnicy dziesięciu łokci, o wysokości pięciu łokci i o obwodzie trzydziestu łokci.* Z opisu tego, znając wzór na obwód koła, wynika, że budowniczy *Salomon* przyjął oszacowanie $\pi=3$.

Pierwszym matematykiem, który badał dokładnie liczbę π, był grecki uczony Archimedes. Co prawda, nie udało mu się wyznaczyć dokładnej wartości liczby π (greccy filozofowie nie dopuszczali myśli, że może istnieć liczba, która nie da się zapisać w postaci ułamka, w którym licznik i mianownik są liczbami całkowitymi) jednak aproksymując (przybliżając) długość okręgu za pomocą wielokątów foremnych wykazał, że π należy do liczb z przedziału od $3\,{}^{10}/_{71}$ do $3\,{}^1/_7$. Z tego też powodu liczbę π nazywa się stałą Archimedesa.

Archimedes jest też autorem jednego z najbardziej znanych problemów starożytności nazwanym przez historię jako kwadratura koła. Aby zrozumieć, czym jest kwadratura koła przybliżymy dział matematyki zwany konstrukcjami matematycznymi.

Klasyczne konstrukcje matematyczne to umiejętność wykonywania nawet bardzo skomplikowanych rysunków matematycznych za pomocą linijki i cyrkla. Należy tu wspomnieć, że przez linijkę rozumiemy nieskończenie długi przyrząd służący do kreślenia linii prostych, wykorzystując do tego tylko jedną jej stronę. Ponieważ linijka wykorzystywana do konstrukcji nie była wyposażona w podziałkę z jednostką, więc nie nadawała się do mierzenia długości. Cyrkiel, to urządzenie do rysowania okręgów o zadanym środku i promieniu równym odległości między dwoma zadanymi punktami (jeden punkt jest środkiem okręgu a drugi jest punktem na okręgu). Oznacza to, że cyrkiel dawał też możliwość porównywania długości dwóch odcinków, lub sprawdzania, ile razy w jednym z nich mieści się drugi odcinek.

Umiejętność posługiwania się linijką i cyrklem do perfekcji opanowali greccy uczeni. **Pomimo silnych prób, nie udało im się jednak wyznaczyć kwadratu, którego pole byłoby równe polu zadanego koła (kwadratura koła).** Archimedes zdawał sobie z tego sprawę, że rozwiązując powyższe zadanie pozwoliłoby to wyznaczyć dokładną wartość liczby π. Zdawali sobie z tego też sprawę potomni matematycy i dlatego przez długie stulecia bezskutecznie próbowali rozwiązać ten problem.

Zamykając temat konstrukcji matematycznych i problem kwadratury koła, wypada wspomnieć o polskim duchownym (jezuicie), matematyku i mechaniku, a także filozofie i fizyku z XVII w., Adamie Adamandim Kochańskim (1631-1700), któremu udało się niezwykle dokładnie dokonać przybliżonej kwadratury koła. Adam Adamandy Kochański był nadwornym matematykiem Jana III Sobieskiego i nauczycielem jego synów.

W roku 1761 Johann Heinrich Lambert udowodnił, że liczba π jest liczbą niewymierną, co oznacza, że nie może być zapisana jako iloraz dwóch liczb całkowitych. Ponad 100 lat później, bo roku 1882, Ferdinand Lindemann udowodnił, że liczba π nie tylko jest liczbą niewymierną, ale także jest liczbą przestępną. Objaśnijmy teraz znaczenie nazw przestępne i nieprzestępne.

Wszystkie liczby niewymierne można podzielić na liczby przestępne i nieprzestępne. **Liczby nieprzestępne** to takie, które mogą być rozwiązaniem pewnego równania o współczynnikach całkowitych. Na mocy tej definicji wszelkie pierwiastki, niezależnie od stopnia, są liczbami nieprzestępnymi. Dla przykładu liczba $\sqrt[5]{10}$ jest liczbą nieprzestępną, bo jest ona rozwiązaniem równania $x^5=10$.

Liczbę nazywamy przestępną, gdy jest ona niewymierna i nie istnieje równanie, którego ta liczba była by rozwiązaniem. Chociaż wiadomo, że liczb przestępnych jest nieskończenie wiele, to jak na razie znane są tylko dwie liczby niewymierne, które są przestępne. Jedną z nich jest właśnie liczba π, a drugą tak zwana liczba e. Liczba e pojawia się najczęściej w towarzystwie logarytmów.

Zgodnie z definicją:

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Oznacza to, że w wyrażeniu $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ podstawiając za liczbę n coraz większą liczbę, będziemy mieli coraz to lepsze przybliżenie liczby e.

Odkrycie Ferdinanda Lindemanna zakończyło poszukiwania rozwiązania problemu kwadratury koła, bo właśnie przestępność liczby π jest powodem niewykonalności takiej konstrukcji. Od tej pory zaprzestano poszukiwań rozwiązania problemu kwadratury koła, a skupiono się na poszukiwaniu coraz to lepszych przybliżeń liczby π.

W XVI wieku holenderski matematyk Ludolph van Ceulen wyznaczył wartość liczby π z dokładnością do 30 cyfr po przecinku. Na uwagę zasługuje fakt, że w tamtych czasach nie były jeszcze znane żadne urządzenia wspomagające człowieka w liczeniu takie jak komputery, czy kalkulatory. Ludolph van Ceulen mógł więc polegać tylko na swoim rozumie, kartce papieru i gęsim piórze. W swoich rachunkach wykorzystał on tę samą metodę aproksymacji okręgu wielokątami foremnymi, którą wykorzystywał przed wiekami Archimedes. W dowód uznania za ten wyczyn, liczba π często poetycko nazywana jest „ludolfiną". Dzisiaj, wykorzystując moc obliczeniową komputerów, matematycy potrafią wyznaczyć liczbę π z dokładnością znacznie przekraczającą milion cyfr po przecinku. Znane jest też rozwinięcie liczby π w ułamek ciągły:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{288 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}$$

Za pomocą tego wyrażenia czytelnik może samodzielnie znaleźć 6 kolejnych ułamków będących przybliżeniami liczby π. Na temat ułamków ciągłych pisaliśmy w 37. numerze *Świata Matematyki*.

Jak już wspomniałem na początku, liczba π fascynowała nie tylko matematyków. Zajmowali się nią także artyści poeci. Początkowo pisano wiersze, które miały pomóc w zapamiętaniu kolejnych cyfr liczby π. I tak np.:

Kuć i orać w dzień zawzięcie,
Bo plonów nie ma bez trudu!
Złocisty szczęścia okręcie,
Kołyszesz...
Kuć! My nie czekajmy cudu.
Robota to potęga ludu!

Raz w maju, w drugą niedzielę
Pi liczył cyfry pan Felek.
Pomnożył, wysumował,
Cyferki zanotował,
Ale ma ich niewiele.

Powstały też piłkarskie opowieści: *Już i Lato, i Deyna strzelili do bramki obcej dwa karne. Lubański dostrzegł mistrza Szarmacha, gdy on tak wypuścił cios szacha, że zdobyć musi cel gry, krzyknął Gol na Mundial Argentyna*. Aby odtworzyć kolejne cyfry liczby π, wystarczy liczyć literki, z których składają się poszczególne słowa wierszyków. Wiersz *Liczba Pi* stworzyła także polska poetka Wisława Szymborska.

Podziwu godna liczba Pi
trzy koma jeden cztery jeden.
Wszystkie jej dalsze cyfry też są początkowe
pięć dziewięć dwa, ponieważ nigdy się nie kończy.
Nie pozwala się objąć sześć pięć trzy pięć spojrzeniem,
osiem dziewięć obliczeniem,
siedem dziewięć wyobraźnią,
a nawet trzy dwa trzy osiem żartem, czyli porównaniem
cztery sześć do czegokolwiek
dwa sześć cztery trzy na świecie.
Najdłuższy ziemski wąż po kilkunastu metrach się urywa.
Podobnie, choć trochę później, czynią węże bajeczne.
Korowód cyfr składających się na liczbę Pi
nie zatrzymuje się na brzegu kartki,
potrafi ciągnąć się po stole, przez powietrze,
przez mur, liść, gniazdo ptasie, chmury, prosto w niebo,
przez całą nieba wzdętość i bezdenność.
O, jak krótki, wprost mysi, jest warkocz komety!
Jak wątły promień gwiazdy, że zakrzywia się w lada przestrzeni!
A tu dwa trzy piętnaście trzysta dziewiętnaście
mój numer telefonu twój numer koszuli
rok tysiąc dziewięćset siedemdziesiąty trzeci szóste piętro
ilość mieszkańców sześćdziesiąt pięć groszy
obwód w biodrach dwa palce szarada i szyfr,
w którym słowiczku mój a leć, a piej
oraz uprasza się zachować spokój,
a także ziemia i niebo przeminą,
ale nie liczba Pi, co to to nie,
ona wciąż swoje niezłe jeszcze pięć,
nie byle jakie osiem,
nie ostatnie siedem,
przynaglając, ach przynaglając gnuśną wieczność
do trwania.