Propozycje rozwiązań zadań otwartych z próbnej matury rozszerzonej przygotowanej przez OPERON.

Zadanie 6.
Dane są punkty A=(5; 2); B=(1; -3); C=(-2; -8). Oblicz odległość punktu A od prostej l przechodzącej przez punkty B i C. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.
Rozwiązanie
Plan rozwiązania
1. Znalezienie równania kierunkowego prostej l zawierającej punkty B i C.
2. Znalezienie równania kierunkowego prostej k, na której leży odcinek, którego długość jest szukaną odległością punktu A od prostej l. Wiemy, że prosta ta musi przechodzić przez punkt A i kl.
3. Znalezienie punktu D wspólnego dla prostych k i l.
4. Wyznaczenie długości odcinka AD.
5. Obliczenie wyznaczonej długości z potrzebną do kodowania dokładnością.

Rozwiązanie:
Ad.1.
Ogólna postać kierunkowa równania prostej to
y=ax+b
Ułóżmy odpowiedni układ równań by wyznaczyć współczynniki *a* i *b*

$$\begin{cases} -3 = a + b \\ -8 = -2a + b \end{cases}$$

Pomnóżmy drugie równanie przez (-1)

$$\begin{cases} -3 = a + b \\ 8 = 2a - b \end{cases}$$

$$5 = 3a$$

I ostatecznie

$$a = \frac{5}{3}$$

Wyznaczmy z pierwszego równania b

$$-3 = \frac{5}{3} + b$$

$$b = -4\frac{2}{3}$$

Ostatecznie mamy

$$l: y = \frac{5}{3}x - 4\frac{2}{3}$$

Ad. 2

Ogólne równanie prostej k

$k: y = ax + b$

Ponieważ proste l i k mają być prostopadłe, więc ich współczynniki kierunkowe są do siebie liczbami odwrotnymi i przeciwnymi, czyli

$a = -\frac{3}{5}$

Tak więc

$k: y = -\frac{3}{5}x + b$

Wstawiając za x i y współrzędne punktu a wyliczymy współczynnik b

$2 = -\frac{3}{5} \cdot 5 + b$

$2 = -3 + b$

$b = 5$

Ostatecznie prosta k ma równanie

$k: y = -\frac{3}{5}x + 5$

Ad. 3

Szukamy punktu D

$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}x - 4\frac{2}{3} \\ y = -\frac{3}{5}x + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 5x - 14 \\ 5y = -3x + 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y = 15x - 42 \\ 25y = -15x + 125 \end{cases}$$

$34y = 83$

$y = \frac{83}{34} = 2\frac{15}{34}$

Z pierwszego równania obliczamy x

$$9 \cdot \frac{83}{34} = 15x - 42$$

$$\frac{747}{34} = 15x - 42$$

$$21\frac{33}{34} = 15x - 42$$

$$63\frac{33}{34} = 15x$$

$$x = \frac{2175}{510} = \frac{145}{34} = 4\frac{9}{34}$$

Czyli $D = (4\frac{9}{34}; 2\frac{15}{34})$

Ad. 4

$$|AD| = \sqrt{(x_A - x_D)^2 + (y_A - y_D)^2} = \sqrt{\left(5 - 4\frac{9}{34}\right)^2 + \left(2 - 2\frac{15}{34}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{34}\right)^2 + \left(-\frac{15}{34}\right)^2}$$
$$=$$
$$\sqrt{\frac{625}{1156} + \frac{225}{1156}} = \sqrt{\frac{850}{1156}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$$

Aby zakodować rozwińmy wartość ostatniego wyrażenia do czterech miejsc po przecinku

$$\frac{5\sqrt{34}}{34} \approx 0{,}8574$$

8	5	7

Zadanie 7.

Oblicz sinus najmniejszego kąta trójkąta o bokach $a = 8; b = 10; c = 12$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

Kąt o najmniejszej rozwartości w trójkącie leży zawsze naprzeciw najkrótszego boku, czyli będzie to kąt lezący naprzeciw boku o długości 8

Zastosujmy do tego zadania twierdzenie cosinusów

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha = a^2$$

$$10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos\alpha = 8^2$$

$$100 + 144 - 240 \cdot \cos\alpha = 64$$

$$244 - 240\cos\alpha = 64$$

$$-240\cos\alpha = -180$$

$$\cos\alpha = \frac{180}{240} = \frac{3}{4}$$

Aby wyznaczyć sinus skorzystajmy ze wzoru

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Dla potrzeb kodowania znajdźmy rozwinięcie wyniku z dokładnością do czterech cyfr po przecinku

$$\frac{\sqrt{7}}{4} \approx 0{,}6614$$

6	6	1

Zadanie 8

Dana jest funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji dla $x = -\sqrt{7}$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie:

Korzystamy z następującego wzoru na pochodną ilorazu funkcji

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Gdzie $g(x) \neq 0$

Podstawmy:

$$f(x) = x^2 - 1$$

I

$g(x) = x^2 - 4$

Wówczas mamy

$$\left[\frac{x^2-1}{x^2-4}\right]' = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{2x\cdot(x^2-4) - 2x\cdot(x^2-1)}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 + 2x}{x^4 - 8x^2 + 16} = \frac{-6x}{x^4 - 8x^2 + 16}$$

Podstawmy teraz za $x = -\sqrt{7}$ i otrzymamy

$$\frac{-6\cdot\left(-\sqrt{7}\right)}{\left(-\sqrt{7}\right)^4 - 8\left(-\sqrt{7}\right)^2 + 16} = \frac{6\sqrt{7}}{49 - 56 + 16} = \frac{6\sqrt{7}}{9} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

Aby zakodować wyznaczmy rozwinięcie dziesiętne z dokładnością do trzech cyfr po przecinku

$$\frac{2\sqrt{7}}{3} \approx 1{,}764$$

1	7	6

Zadanie 9

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{11n^2-1}$. Zakoduj trzy początkowe cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w liczniku mamy ciąg arytmetyczny. Obliczmy sumę tego ciągu korzystając ze wzoru

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

$a_1 = 2$

$a_n = 2n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+6+\cdots+2n}{11n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+2n}{2}\cdot n}{11n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2}{11n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}{\frac{11n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}} = \frac{0+1}{11-0} =$$

$$= \frac{1}{11}$$

Aby zakodować znajdźmy rozwinięcie tej liczby z dokładnością do czterech cyfr po przecinku

$$\frac{1}{11} \approx 0{,}0909$$

0	9	0

Zadanie 10

Pierwiastkami równania $x^2 + 7x + 4 = 0$ są liczby x_1 i x_2. Oblicz wartość sumy sześcianów liczb x_1 i x_2. Zakoduj cyfrę setek dziesiątek i jedności wartości bezwzględnej otrzymanego wyniku..

Rozwiązanie:

Rozwiążmy równanie kwadratowe

$$\Delta = 49 - 16 = 33$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{33}$$

$$x_1 = \frac{-7-\sqrt{33}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$$

$$x_1^3 = \left(\frac{-7-\sqrt{33}}{2}\right)^3 = \frac{(-1)^3\left(7+\sqrt{33}\right)^3}{8} = \frac{-\left(343+147\sqrt{33}+693+33\sqrt{33}\right)}{8} =$$

$$= \frac{-\left(1036+180\sqrt{33}\right)}{8} = \frac{-4\left(259+45\sqrt{33}\right)}{8} = -\frac{259+45\sqrt{33}}{2}$$

$$x_2^3 = \left(\frac{-7+\sqrt{33}}{2}\right)^3 = \frac{-343+147\sqrt{33}-693+33\sqrt{33}}{8} = \frac{-1036+180\sqrt{33}}{8} =$$

$$= \frac{-259+45\sqrt{33}}{2}$$

$$x_1^3 + x_2^3 = \frac{-259-45\sqrt{33}}{2} + \frac{-259+45\sqrt{33}}{2} = \frac{-518}{2} = -259$$

|-259|=259

2	5	9

Zadanie 11

Wykaż, że jeśli $\log_{24} 6 = a$ to $\log_6 256 = \frac{4(1-a)}{a}$.

Rozwiązanie:

W rozwiązaniu wykorzystamy następujące wzory

Wzór na zmianę podstawy logarytmu

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Logarytm na iloczyn i iloraz liczb

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Logarytm z potęgi

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

Wyjdźmy od $\log_6 256$ i zmieńmy jego podstawę

$$\log_6 256 = \frac{\log_{24} 256}{\log_{24} 6} = \frac{\log_{24} 2^8}{\log_{24} 6} = \frac{\log_{24} (2^2)^4}{\log_{24} 6} = \frac{4 \log_{24} 4}{\log_{24} 6}$$

Ale $4 = \frac{24}{6}$

Więc

$$\frac{4 \log_{24} 4}{\log_{24} 6} = \frac{4 \cdot \log_{24} \frac{24}{6}}{\log_{24} 6} = \frac{4 \cdot (\log_{24} 24 - \log_{24} 6)}{\log_{24} 6}$$

Ponieważ

$$\log_{24} 24 = 1$$

I zgodnie z założeniem

$$\log_{24} 6 = a$$

Więc

$$\frac{4 \cdot (\log_{24} 24 - \log_{24} 6)}{\log_{24} 6} = \frac{4 \cdot (1 - a)}{a}$$

Co należało dowieść

Zadanie 12

Wyznacz równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 - 6x + y^2 + 10y = 0$, prostopadłej do prostej $3x - 4y + 5 = 0$

Rozwiązanie:

Plan rozwiązania

1. Znajdźmy współrzędne środka O zadanego okręgu i jego promień.

2. Sprawdźmy, czy środek okręgu O należy do zadanej prostej, jeżeli nie to wyznaczmy kierunkowe równanie prostej l przechodzącej przez punkt O.

3. Znajdźmy punkty wspólne prostej l i zadanego okręgu. (są to punkty styczności)

4. Wyznaczmy współczynnik kierunkowy prostych stycznych do okręgu i prostopadłych do prostej l

5 Wyznaczmy równania szukanych prostych.

Ad. 1

Ogólne równanie okręgu ma postać

$x^2 - 2ax + y^2 - 2by + c = 0 \quad gdzie \quad a \text{ i } b \text{ to współrzędne środka okręgu,} \quad a$

$r^2 = a^2 + b^2 - c$

Z równania podanego w zadaniu można odczytać, że

$2a = 6 \qquad\qquad 2b = -10$

Więc

$a = 3 \qquad b = -5$

Oznacza to, że $O = (3; -5)$

Ponieważ $c = 0$, więc

$r^2 = a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-5)^2 - 0 = 9 + 25 = 34$

Promień $r = \sqrt{34}$

Ad. 2

Wstawmy współrzędne punktu O do równania prostej $3x - 4y + 5 = 0$

$3 \cdot 3 - 4 \cdot (-5) + 5 = 9 + 20 + 5 = 34 \neq 0$

Ponieważ prosta l ma być równoległa do zadanej prostej, więc będzie miała ten sam współczynnik kierunkowy. Doprowadźmy więc zadane równanie prostej do postaci kierunkowej.

$$3x - 4y + 5 = 0$$

$$4y = 3x + 5$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

Ogólna postać prostej l wynosi

$$l: y = \frac{3}{4}x + b$$

Podstawiając za x i y odpowiednio współrzędne środka okręgu wyznaczymy współczynnik b

$$-5 = \frac{3}{4} \cdot 3 + b$$

$$-5 = \frac{9}{4} + b$$

$$b = -7\frac{1}{4}$$

Prosta l opisana więc jest równaniem

$$l: y = \frac{3}{4}x - 7\frac{1}{4}$$

Ad. 3

Rozwiązując poniższy układ równań znajdziemy punkty wspólne prostej l i okręgu, które mają być szukanymi punktami styczności

$$\begin{cases} x^2 - 6x + y^2 + 10y = 0 \\ y = \frac{3}{4}x - 7\frac{1}{4} \end{cases}$$

Wstawmy w pierwszym równaniu za y wyrażenie będące po prawej stronie drugiego równania

$$x^2 - 6x + \left(\frac{3}{4}x - \frac{29}{4}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{3}{4}x - \frac{29}{4}\right) = 0$$

$$x^2 - 6x + \frac{9}{16}x^2 - \frac{87}{8}x + \frac{841}{16} + \frac{15}{2}x - \frac{145}{2} = 0$$

$16x^2 - 96x + 9x^2 - 174x + 841 + 120x - 1160 = 0$

$25x^2 - 150x - 319 = 0$

$\Delta = 22500 + 31900 = 54400$

$\sqrt{\Delta} = 40\sqrt{34}$

$$x_1 = \frac{150 - 40\sqrt{34}}{50} = \frac{15 - 4\sqrt{34}}{5}$$

$$x_2 = \frac{15 + 4\sqrt{34}}{5}$$

Gdy $x_1 = \frac{15-4\sqrt{34}}{5}$, to $y_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{15-4\sqrt{34}}{5} - \frac{29}{4} = \frac{45}{20} - \frac{12}{20} \cdot \sqrt{34} - \frac{29}{4} = -5 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34}$

Gdy $x_2 = \frac{15+4\sqrt{34}}{5}$, to $y_2 = -5 + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34}$

Mamy więc dwa punkty styczności

$$A = \left(3 - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{34};\ -5 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34}\right) \quad i \quad B = \left(3 + \frac{4}{5} \cdot \sqrt{34};\ -5 + \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34}\right)$$

Ad. 4

Wyznaczamy równania prostych stycznych do naszego okręgu i prostopadłych do prostej l. Współczynnik kierunkowy obydwóch prostych $a = -\frac{4}{3}$

Ogólna postać tych równań to $y = -\frac{4}{3}x + b$

$$-5 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34} = -\frac{4}{3} \cdot \left(3 - \frac{4}{5} \cdot \sqrt{34}\right) + b$$

$$-5 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34} = -4 + \frac{16}{15} \cdot \sqrt{34} + b$$

$$b = -5 - \frac{3}{5} \cdot \sqrt{34} + 4 - \frac{16}{15} \cdot \sqrt{34}$$

$$b = -1 - \frac{25}{15} \cdot \sqrt{34}$$

Równanie jednej stycznej ma postać

$$y = -\frac{4}{3}x - 1 - \frac{5}{3} \cdot \sqrt{34}$$

Lub jak kto woli

$$4x+3y+3+5\sqrt{34}=0$$

Wyznaczmy jeszcze drugie równanie

$$-5+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{34}=-\frac{4}{3}\cdot\left(3+\frac{4}{5}\cdot\sqrt{34}\right)+b$$

$$-5+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{34}=-4-\frac{16}{15}\cdot\sqrt{34}+b$$

$$-5+\frac{3}{5}\cdot\sqrt{34}+4+\frac{16}{15}\cdot\sqrt{34}=b$$

$$b=-1+\frac{25}{15}\cdot\sqrt{34}$$

I ostatecznie

$$y=-\frac{4}{3}x-1+\frac{5}{3}\cdot\sqrt{34}$$

Lub inaczej

$$4x+3y-3+5\sqrt{34}$$

Zadanie 13

Dany jest trójmian $f(x)=x^2+(2m+2)x+4$. Wyznacz parametr m , jeśli wiadomo, że ciąg $(x_1; (m+5); x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są różnymi miejscami zerowymi tego trójmianu, jest geometryczny.

Rozwiązanie:

Ponieważ trójmian z zadania ma dwa różne miejsca zerowe, więc jego wyróżnik Δ musi być dodatni. Sprawdźmy dla jakich parametrów m wyróżnik Δ jest dodatni.

$$\Delta=b^2-4ac=(2m+2)^2-4ac>0$$

$$4m^2+8m+4-4\cdot1\cdot4=4m^2+8m-12>0$$

Warunek na m można wyliczyć rozwiązując ostatnią nierówność kwadratową. Na początek podzielmy obie strony nierówności przez 4

$$m^2+2m-3>0$$

$$\Delta=4+12=16$$

$\sqrt{\Delta} = 4$

$m_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3$ $\qquad\qquad$ $m_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1$

Ponieważ współczynnik przy m^2 jest dodatni więc aby Δ wyjściowego równania była dodatnia m musi spełniać następujące warunki

$m < -3 \quad i \quad m > 1$

Ponieważ ciąg $(x_1;\ (m+5);\ x_2)$ jest geometryczny więc spełniony jest warunek

$$\frac{x_1}{m+5} = \frac{m+5}{x_2}$$

Z tego warunku wynika poniższy warunek

$(m+5)^2 = x_1 \cdot x_2$

Na mocy wzorów Viete'a

$x_1 \cdot x_2 = 4$

Więc

$(m+5)^2 = 4$

$(m+5)^2 - 2^2 = 0$

$(m+5-2)(m+5+2) = 0$

$m = -3 \quad lub \quad m = -7$

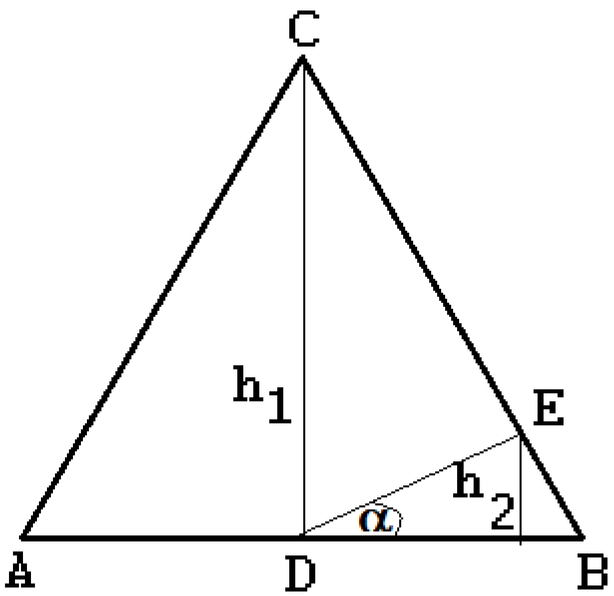
Ponieważ -3 nie spełnia warunków zadania więc $m = -7$

Zadanie 14

Dany jest trójkąt równoboczny ABC, w którym punkt D jest środkiem boku AB. Przez punkt D poprowadzono prostą pod kątem α do boku AB, która przecięła bok BC w punkcie E, takim, że pole trójkąta BDE jest równe $\frac{1}{8}$ pola trójkąta ABC. Wykaż, że $\alpha = 30^o$.

Rozwiązanie:

Zróbmy poglądowy rysunek



Niech $P_{ABC} = \frac{1}{2} a_1 \cdot h_1$ $\quad i\, nich \quad$ $P_{BDE} = \frac{1}{2} a_2 \cdot h_2$

Ponieważ

$P_{ABC} = 8 \cdot P_{BDE} \qquad i \qquad a_2 = \frac{1}{2} a_1$

$\frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 = 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot h_2$

$\frac{1}{2} a_1 \cdot h_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_2$

$a_1 \cdot h_1 = 4 \cdot a_1 \cdot h_2$

$h_2 = \frac{1}{4} h_1$

Spodek wysokości h_2 oznaczmy literką F

Ponieważ $h_1 || h_2$ a podstawy obu trójkątów leżą na tej samej prostej więc z podobieństwa trójkątów BCD i BEF mamy: $|BF| = \frac{1}{4}|BD| \qquad i \qquad |BE| = \frac{1}{4}|BC|$

Odcinek, który wychodziłby z punktu D i był równoległy do odcinka AC tworzyłby z podstawą kąt 60^{o} i wycinałby z trójkąta ABC trójkąt równoboczny. Odcinek DE padałby na środek tego równobocznego trójkąta czyli byłby jego wysokością, dlatego tworzy z podstawą AB kąt 30^{o}

Zadanie 15

Rozwiąż równanie $\sin 2x + \cos 4x = 0$

Rozwiązanie:

Zastosujmy podstawienie

$2x = \alpha$

Nasze równanie będzie miało postać

$\sin \alpha + \cos 2\alpha = 0$

$\sin \alpha + 1 - 2sin^2 \alpha = 0$

Niech $\sin \alpha = y$

Wówczas nasze równanie ma postać

$2y^2 - y - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9$

$\sqrt{\Delta} = 3$

$y_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ $\quad lub \quad$ $y_2 = \frac{1+3}{4} = 1$

Czyli $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ $\quad lub \quad$ $\sin \alpha = 1$

W pierwszym przypadku $\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi$ $\quad lub \quad$ $\alpha = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$

W drugim przypadku $\alpha = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$

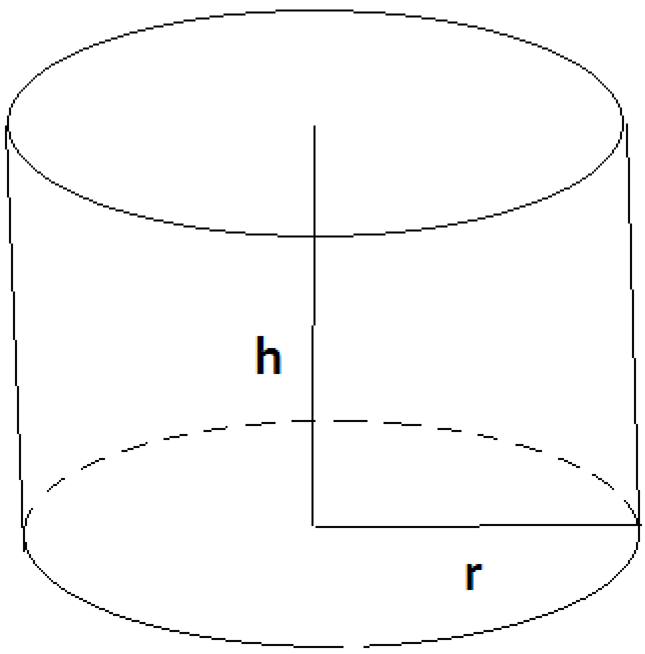
W takim razie $x = \frac{7}{12}\pi + k\pi$ $\quad lub \quad$ $x = \frac{11}{12}\pi + k\pi$ $\quad lub \quad$ $x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$

Zadanie 16

Puszka ma kształt walca o objętości π dm^3 Wyznacz promień podstawy i wysokość walca, aby pole powierzchni całkowitej puszki buło najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole

Rozwiązanie

Zacznijmy od poglądowego rysunku



$V = \pi r^2 h = \pi$

$h = \frac{1}{r^2}$

$P = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

Podstawmy do wzoru wyznaczone poprzednio h

$P = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$

Jeśli pole potraktujemy jako funkcję zmiennej r' to mamy

$P(r) = 2\pi r^2 + \frac{2\pi}{r}$

Funkcja ma ekstrema dla argumentu dla którego pochodna przyjmuje wartość 0.

Policzmy więc pochodną funkcji $P(r)$

$P'(r) = 4\pi r - \frac{2\pi}{r^2}$

Przyrównajmy pochodną do 0

$4\pi r - \frac{2\pi}{r^2} = 0$

$2r^3 - 1 = 0$

$r^3 - \frac{1}{2} = 0$

$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

$r = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$r = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

Puszka będzie miała najmniejsze pole gdy $r = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$ i $h = \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{16}}{4}} = \frac{4}{2\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}$

Pole całkowite tej puszki wyniesie

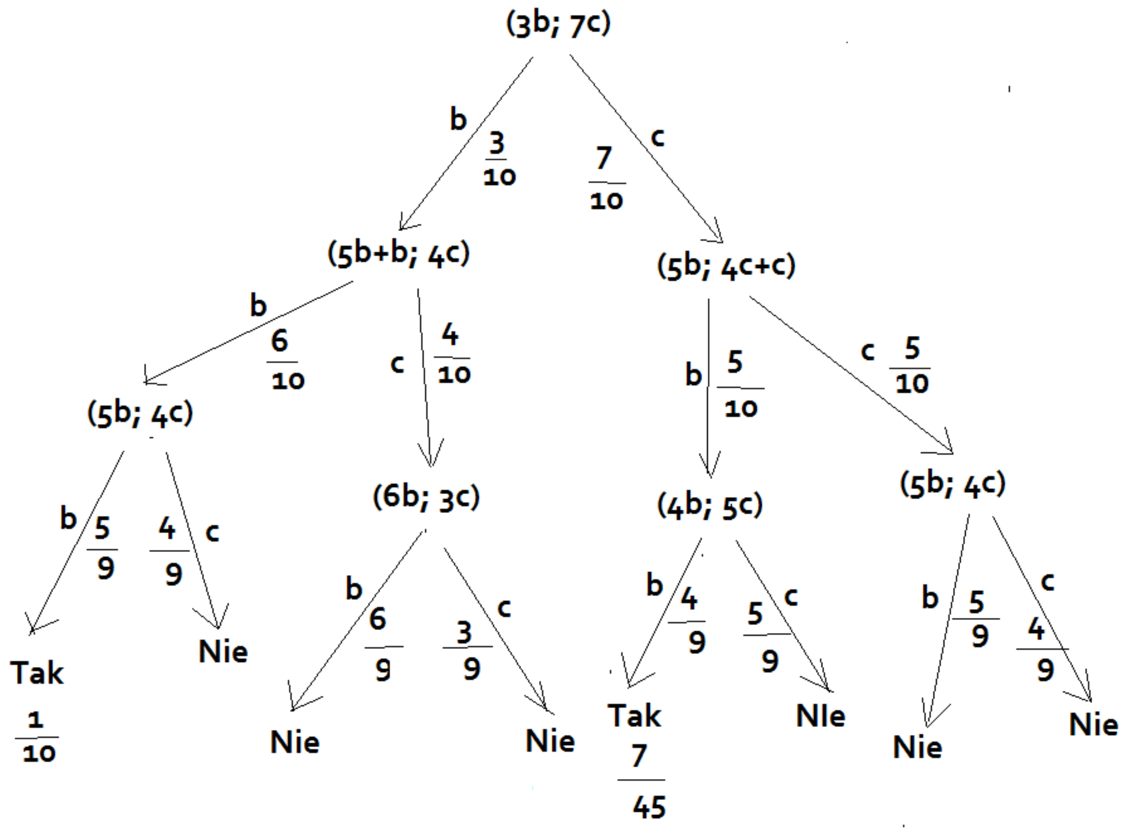
$P = 2\pi r^2 + 2\pi rh = \frac{2\pi\sqrt[3]{16}}{4} + \frac{2\pi\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = \pi\sqrt[3]{2} + 2\pi\sqrt[3]{2} = 3\pi\sqrt[3]{2}$

Zadanie 17

W urnie U_1 są 3 kule białe i7 kul czarnych, a w urnie U_2 jest 5 kul białych i 4 czarne. Wybieramy losowo kulę z urny U_1 i wkładamy do urny U_2. Następnie z urny U_2 losujemy dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ten sposób wylosujemy dwie kule białe.

Rozwiązanie:

Zadanie można rozwiązać na wiele sposobów, ale najprościej chyba będzie zastosować drzewko



Komentarz do drzewka.

Nad strzałkami zaznaczono stan urny, z której aktualnie losujemy, na strzałce zaznaczono kolor wylosowanej kul i prawdopodobieństwo jej wylosowania. Tak na dole drzewka oznacza zdarzenie sprzyjające.

Pierwsze piętro drzewka (licząc od góry to pierwsze losowanie z urny U_1 i dorzucenie wylosowanej kuli do drugiej urny.

Drugie piętro to losowanie z drugiej urny pierwszej kuli. Trzecie ostatnie piętro (na samym dole, to losowanie drugiej kuli z drugiej urny..

Ułamki pod wyrazami Tak to iloczyn prawdopodobieństw z poszczególnych gałązek drzewka.

Całkowite prawdopodobieństwo będzie równe sumie ułamków zapisanych na dole

$$\frac{1}{10}+\frac{7}{45}=\frac{23}{90}$$

Zadanie 18

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli pierwszą liczbę zmniejszymy 1, drugą liczbę zwiększymy o 15,a trzecią zwiększymy o 37, to otrzymamy ciąg geometryczny. Wyznacz te liczby, jeśli wiadomo, że ich suma jest równa 63.

Rozwiązanie:

Niech nasze liczby to *a; b; c.*

Wówczas

$b = x$ $a = x - r$ $c = x + r$

$a + b + c = 63$

$x - r + x + x + r = 63$

$3x = 63$

$x = 21$

Czyli $a = 21 - r$ $b = 21$ $c = 21 + r$

W ciągu geometrycznym $\beta = 21 + 15 = 36$ $\alpha = a - 1 = 21 - r - 1 = 20 - r$

$\delta = c + 37 = 21 + r + 37 = 58 + r$

Dla ciągu geometrycznego zachodzi też następująca własność

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\delta}$$

Z równości tej wynika, że $\alpha \cdot \delta = \beta^2$

Podstawmy do tej równości nasze dane

$(20 - r)(58 + r) = 36^2$

$1160 + 20r - 58r - r^2 = 1296$

$-r^2 - 38r - 136 = 0$

$r^2 + 38r + 136 = 0$

$\Delta = 38^2 - 544 = 1444 - 544 = 900$

$\sqrt{\Delta} = 30$

$r = \frac{-38 - 30}{2} = -34$ lub $r = \frac{-38 + 30}{2} = -4$

$a = 21 - (-34) = 55$ $c = 21 + (-34) = -13$

lub

$a = 21 - (-4) = 25$ $\quad\quad\quad\quad$ $c = 21 + (-4) = 17$

Zadanie ma dwa rozwiązania – jedno to liczby 55; 21 i -13; a drugie to liczby 25; 21 i 17.