Rozwiązania zadań zamkniętych z próbnego egzaminu z matematyki rozszerzonej z dnia 25 listopada.

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1.–5. wybierz i zaznacz jedną poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Funkcja określona wzorem $f(x) = |x+3| + 5$:

A. ma więcej niż dwa miejsca zerowe
B. ma dwa miejsca zerowe
C. ma jedno miejsce zerowe
D. nie ma miejsc zerowych

Zadanie 2. (0–1)

Dokładna wartość liczby $\sin 15°$ to:

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Zadanie 3. (0–1)

Funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$:

A. ma trzy ekstrema lokalne
B. ma dwa ekstrema lokalne
C. ma jedno ekstremum lokalne
D. nie ma ekstremów lokalnych

Zadanie 4. (0–1)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość a. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i środek przeciwległej do niej krawędzi bocznej. Pole otrzymanego przekroju jest równe:

A. $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ **B.** $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** $P = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ **D.** $P = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Zadanie 5. (0–1)

Dany jest ciąg określony wzorem rekurencyjnym $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{3a_n - n}{2} \end{cases}$. Czwarty wyraz tego ciągu jest równy:

A. $\frac{8}{2}$ **B.** $\frac{8}{3}$

C. $\frac{29}{4}$ **D.** $\frac{75}{8}$

Ad. 1

Wystarczy zauważyć, że f(x) jest sumą dodatniej liczby 5 i jakieś liczby $y = |x+3| \geq 0$. W takim razie f(x) jest nie mniejsze od 5, czyli nie ma miejsc zerowych. **Odpowiedź D**

Ad. 2

To zadanie najlepiej jest potraktować jako zadanie otwarte i wyznaczyć $\sin 15^0$

$$\sin 15^o = \sin(60^o - 45^o) = \sin 60^o \cdot \cos 45^o - \sin 45^o \cdot \cos 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Odpowiedź D

Ad. 3

Funkcja **może** mieć ekstremum lokalne tylko dla tych argumentów dla których wartość pochodnej wynosi 0. Obliczmy więc pochodną funkcji $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

$$f'(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$$

Poszukajmy miejsca zerowe f'(x)

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2 = 0$$

Ostatnia równość zachodzi, gdy $x = 0$ $\quad lub \quad$ $x = 1$

Ponieważ jednak

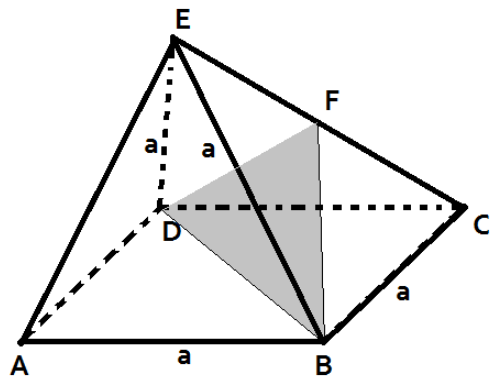
$$x^2(x-1)^2 \geq 0$$

Bo iloczyn dwóch kwadratów nie może być ujemny, więc argumenty 0 i 1 są punktami przegięcia wykresu funkcji f(x). Funkcja osiągnie ekstremum lokalne w jakimś argumencie x_0 tylko wtedy, gdy znaki pochodnej po obu stronach

Odpowiedź: Funkcja f(x) nie ma ekstremów lokalnych **Odpowiedź D**

Ad. 4

Wykonajmy pomocniczy rysunek



Należy znaleźć pole zacieniowanego trójkąta. Ponieważ ostrosłup jest prawidłowy więc w podstawie jest kwadrat o boku a, czyli |DB|=$a\sqrt{2}$.

Ściany boczne ostrosłupa są trójkątami równobocznymi czyli BF jako wysokość trójkąta równobocznego BCE ma długość $|BF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. DF jako wysokość trójkąta równobocznego DCE ma też długość $|DF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Więc trójkąt DBF jest równoramienny.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa obliczmy wysokość tego trójkąta.

$$|BF|^2 - \left(\frac{1}{2}|BD|\right)^2 = h^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 = h^2$$

$$\frac{3a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = h^2$$

$$\frac{a^2}{4} = h^2$$

Więc

$$h = \frac{a}{2}$$

$$P_{BDF} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

Odpowiedź C

Ad. 5

Wyznaczmy kolejne cztery wyrazy tego ciągu

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{3a_1 - 1}{2} = \frac{3 \cdot 4 - 1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$a_3 = \frac{3a_2 - 2}{2} = \frac{3 \cdot \frac{11}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{33}{2} - 2}{2} = \frac{\frac{29}{2}}{2} = \frac{29}{4}$$

$$a_4 = \frac{3a_3 - 3}{2} = \frac{3 \cdot \frac{29}{4} - 3}{2} = \frac{\frac{87}{4} - 3}{2} = \frac{\frac{75}{4}}{2} = \frac{75}{8}$$

Odpowiedź D.